

Cinemática inversa

Dan Casas

Cinemática inversa

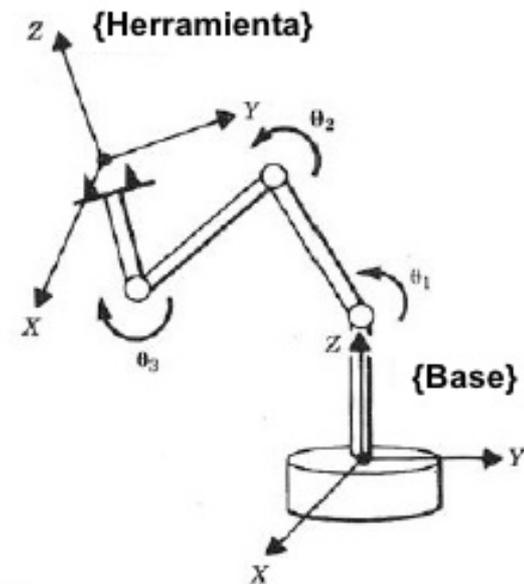
- **Cinemática directa**

- **Conocidos:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones
- **Determinar:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base

$$f(\theta) = {}^B_H T$$

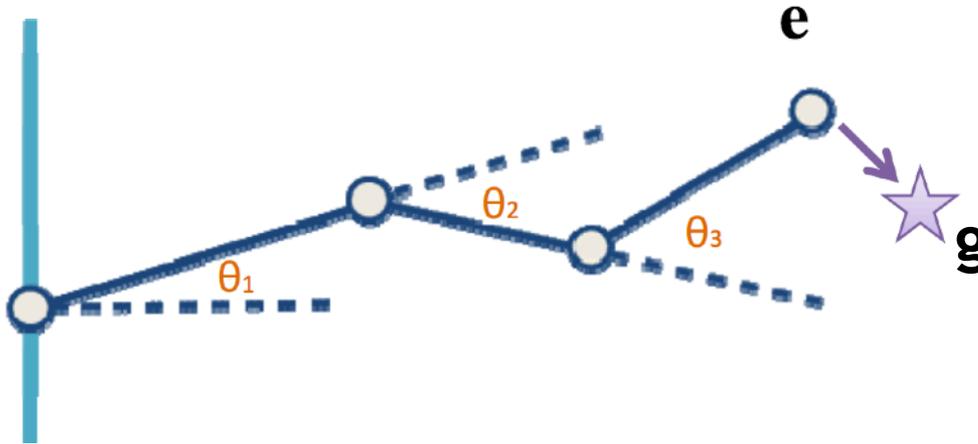
- **Cinemática inversa**

- **Conocidos:** Posición y orientación del elemento terminal referido a la base
- **Determinar:** Ángulos articulares y geometría de los eslabones para alcanzar la orientación y posición de la herramienta



$$\theta = f^{-1}({}^B_H T)$$

Cinemática inversa



En general

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

Ángulos de rotación

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]$$

$$\Theta = f^{-1}(\mathbf{e})$$

En este caso particular

$$\mathbf{e} = [e_x \ e_y]$$

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$$

¿Qué tenemos?

¿Qué queremos?

¿Qué necesitamos?

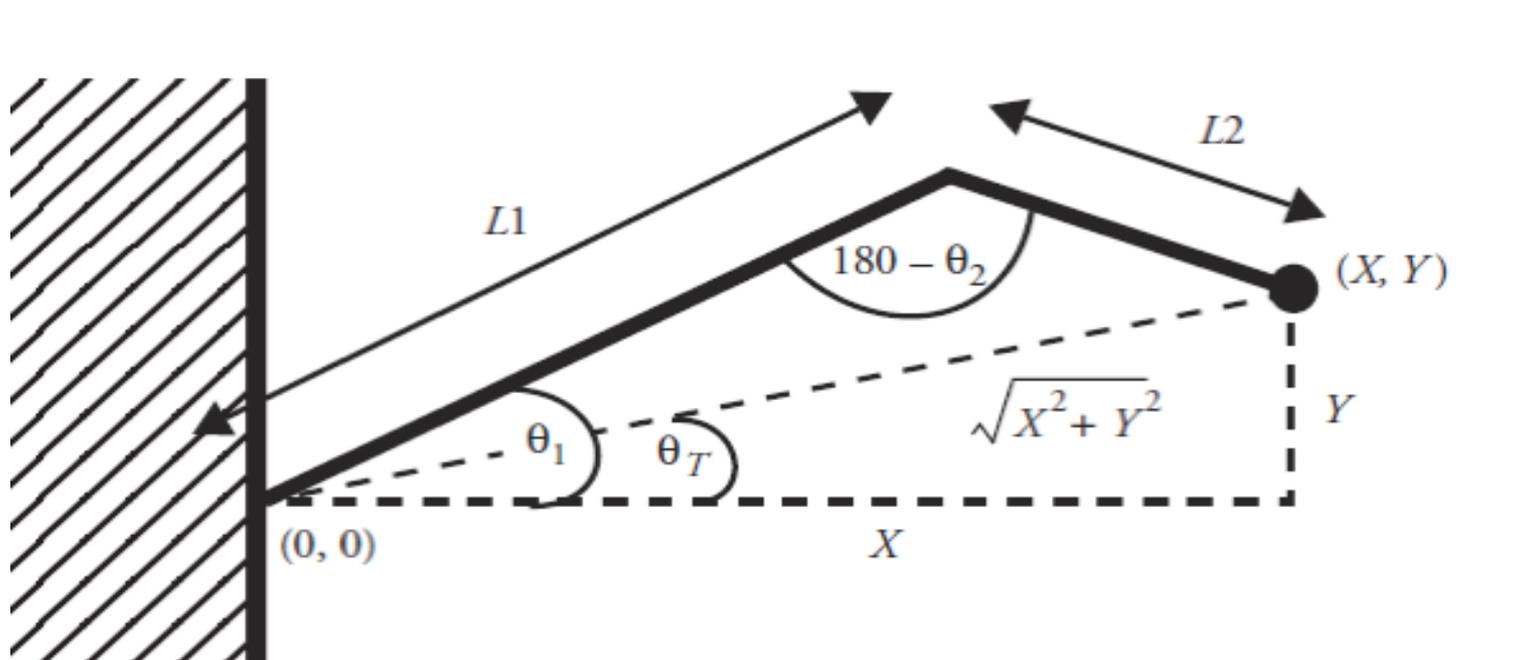
Cinemática inversa

- Métodos geométricos
 - Reglas geométricas
 - Sistemas relativamente sencillos
- Métodos iterativos
 - Jacobiano
 - Método aproximado
 - Sistemas complejos

Método geométrico

Por supuesto, el primer paso es asegurarse de que la posición del objetivo está dentro del alcance del efector de extremo; que es decir:

$$L1 - L2 \leq \sqrt{X^2 + Y^2} \leq L1 + L2$$



Método analítico

Las ecuaciones utilizadas en la solución de problemas simples cinemática inversa son:

$$\cos(\theta_T) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\theta_T = \arccos\left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}\right)$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_T) = \frac{L1^2 + X^2 + Y^2 - L2^2}{2 \cdot L1 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (\text{cosine rule})$$

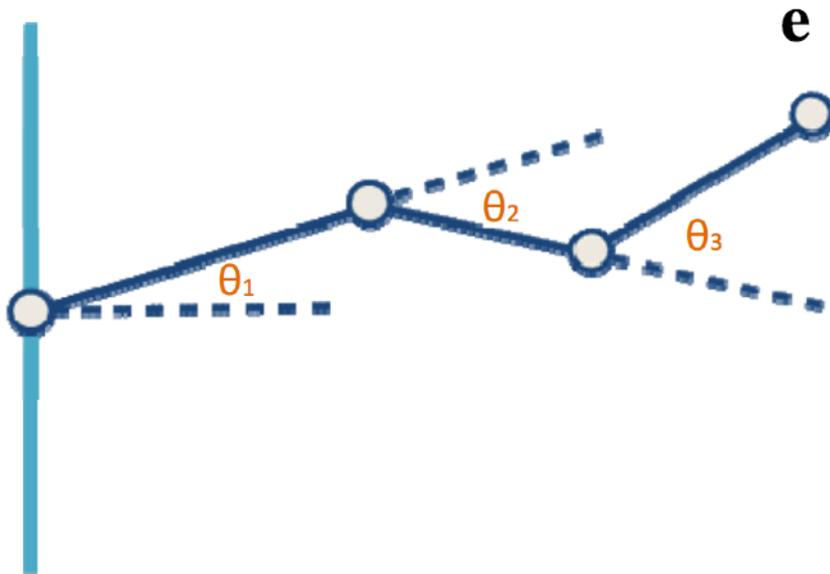
$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{L1^2 + X^2 + Y^2 - L2^2}{2 \cdot L1 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}}\right) + \theta_T$$

$$\cos(180 - \theta_2) = \frac{L1^2 + L2^2 - (X^2 + Y^2)}{2 \cdot L1 \cdot L2} \quad (\text{cosine rule})$$

$$\theta_2 = \arccos\left(\left(\frac{L1^2 + L2^2 - (X^2 + Y^2)}{2 \cdot L1 \cdot L2}\right)\right)$$

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
 - ▶ Matriz de derivadas parciales
 - ▶ Define como la posición e se mueve en función de cambios pequeños de Θ

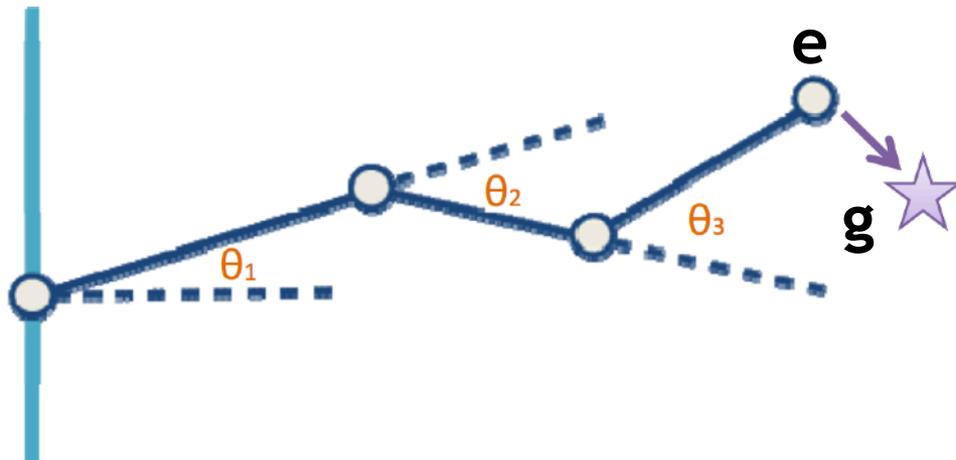


Método Incremental: Jacobiano

El end effector se mueve iterativamente hasta que la configuración final se alcanza dentro de una tolerancia dada.

Vamos a minimizar en función de Θ esta expresión

$$\|f(\Theta) - g\|_2$$



Utilizaremos el Jacobian para saber como modificar Θ para que esta expresión acabe siendo próxima a 0

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
 - ▶ Matriz de derivadas parciales
 - ▶ Define como la posición \mathbf{e} se mueve en función cambios pequeños de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

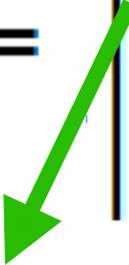
$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

Angulos de rotación

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]$$

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
 - ▶ Matriz de derivadas parciales
 - ▶ Define como la posición \mathbf{e} se mueve en función cambios pequeños de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$


Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

Angulos de rotación

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]$$

¿Cómo cambia la coordenada x del punto final \mathbf{e} , si incremento θ_1 un poco?

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
 - ▶ Matriz de derivadas parciales
 - ▶ Define como la posición \mathbf{e} se mueve en función cambios pequeños de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

Angulos de rotación

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]$$

$$J = \frac{d\mathbf{e}}{d\Theta} \quad d\mathbf{e} = Jd\Theta$$

Derivadas de \mathbf{e} respecto Θ

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
 - ▶ Matriz de derivadas parciales
 - ▶ Define como la posición \mathbf{e} se mueve en función cambios pequeños de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

Angulos de rotación

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]$$

$$J = \frac{d\mathbf{e}}{d\Theta}$$

$$d\mathbf{e} = J d\Theta \longrightarrow d\Theta = J^{-1} d\mathbf{e}$$

Método Incremental: Jacobiano

- Jacobiano
 - ▶ Matriz de derivadas parciales
 - ▶ Define como la posición \mathbf{e} se mueve en función cambios pequeños de Θ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_x}{\partial \theta_M} \\ \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_M} \end{bmatrix}$$

Posición final

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_N]$$

Angulos de rotación

$$\Theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_M]$$

$$J = \frac{d\mathbf{e}}{d\Theta}$$

$$d\mathbf{e} = J d\Theta$$



$$d\Theta = J^{-1} d\mathbf{e}$$

Hacia dónde
quiero ir

Método Incremental: Jacobiano

Problema: ¿Cómo calcular J?

Fíjate en una columna de J

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial e_y}{\partial \theta_1} \end{bmatrix}^T$$

Podemos añadir un pequeño incremento $\Delta\theta$ a θ_i y recalcular cómo cambia el punto final $\Delta \mathbf{e} = \mathbf{e}' - \mathbf{e}$

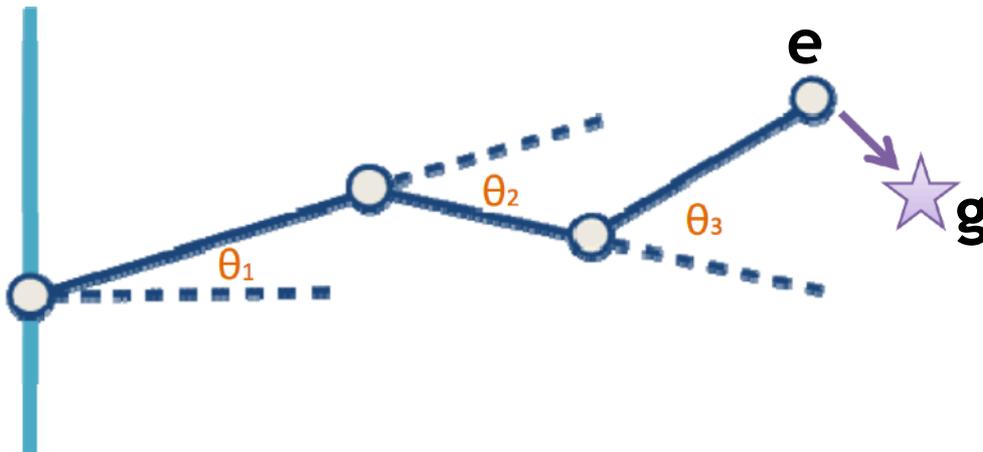
Esto resulta en una aproximación numérica

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \theta_1} \approx \frac{\Delta \mathbf{e}}{\Delta \theta_1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta e_x}{\Delta \theta_1} & \frac{\Delta e_y}{\Delta \theta_1} \end{bmatrix}^T$$

Utilizaremos este método para rellenar el jacobiano J¹³

Método Incremental: Jacobiano

```
while (e está lejos de g) {  
    calcular jacobiano J  
    calcular pseudoinversa de J  $\rightarrow J^+$   
    calcular incrementos en ángulos:  $\Delta\theta = J^+ \cdot (g - e)$   
    actualizar ángulos  $\theta = \theta + \alpha\Delta\theta$   
}
```



Demo