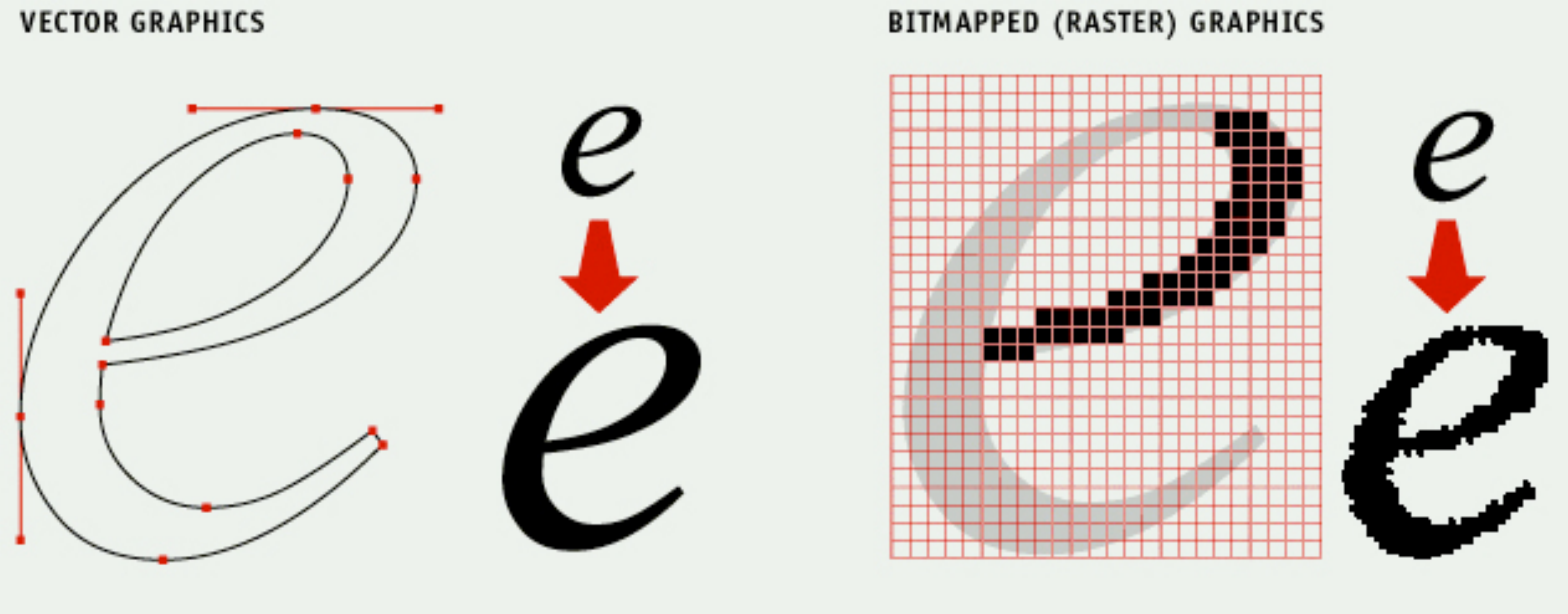
Interpolación

Dan Casas

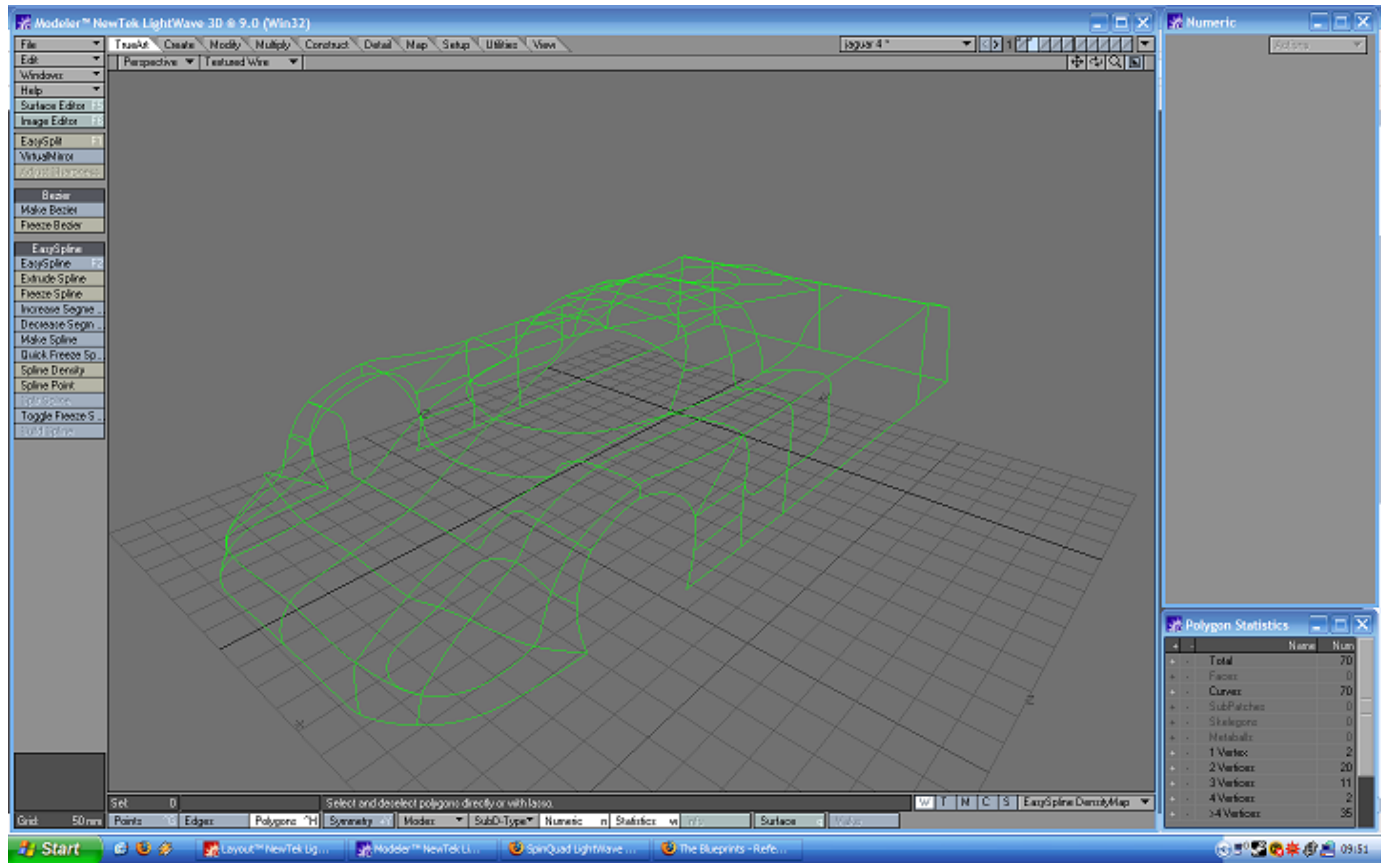
Motivación

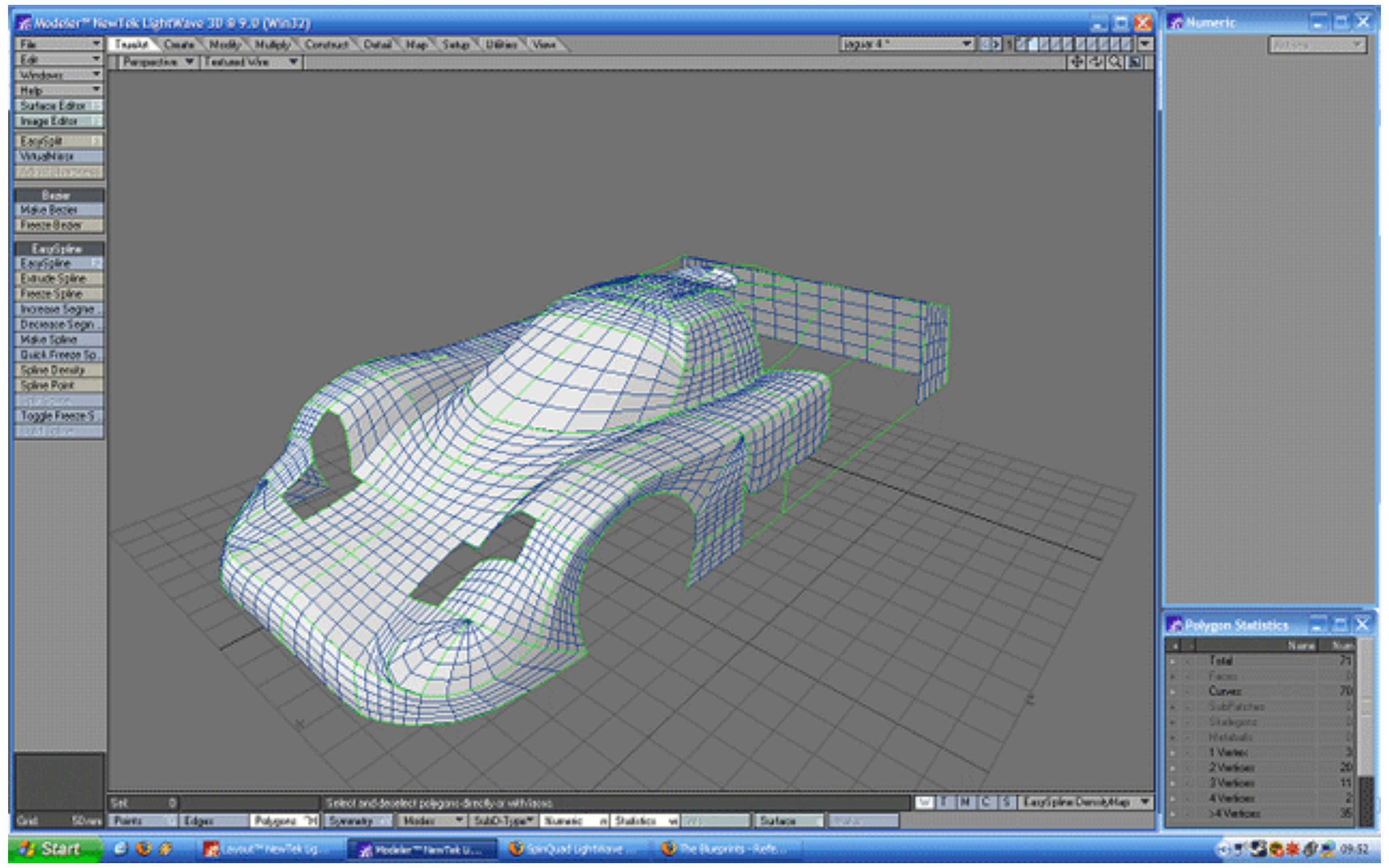
Motivación

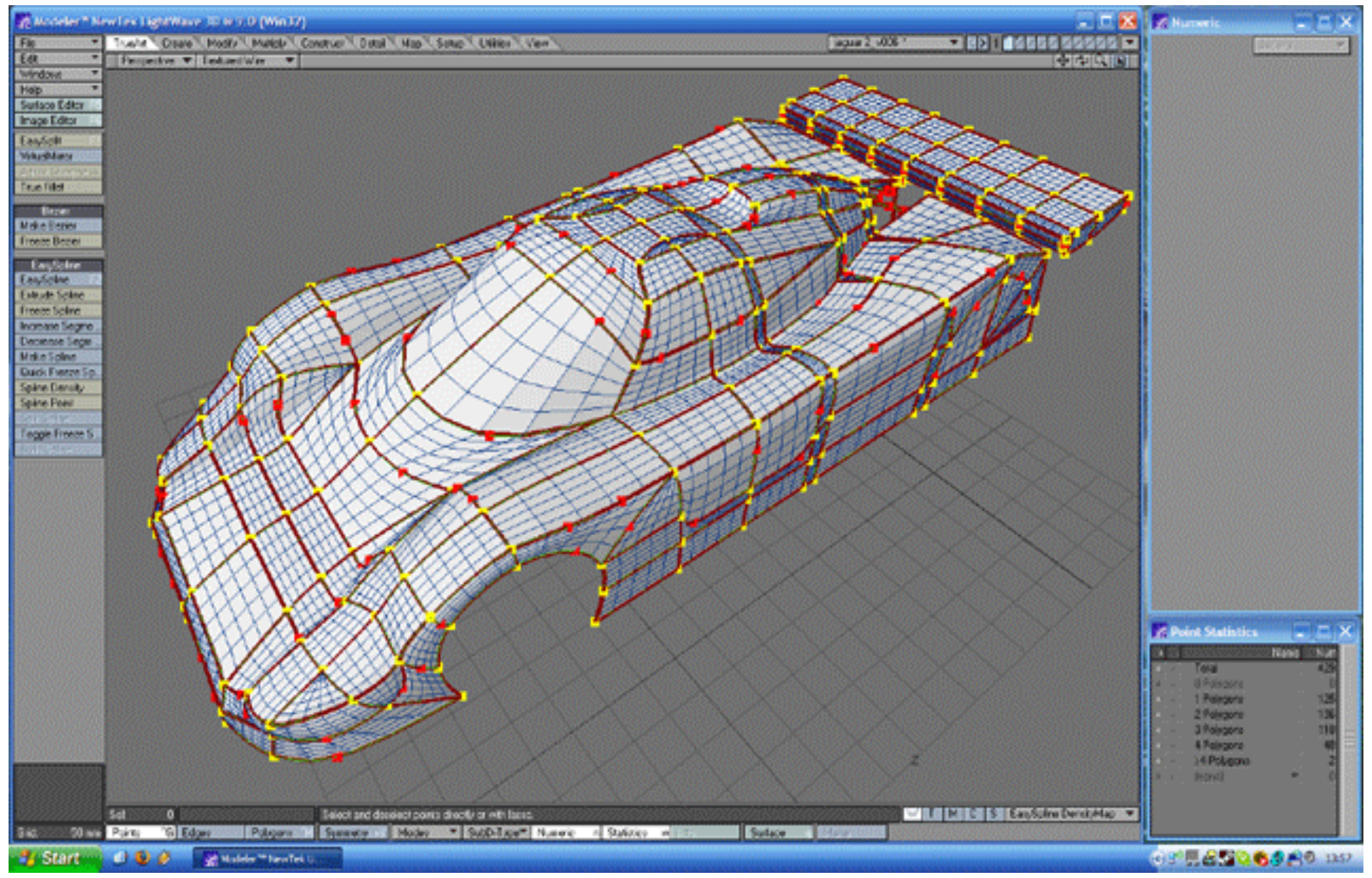
Motivación



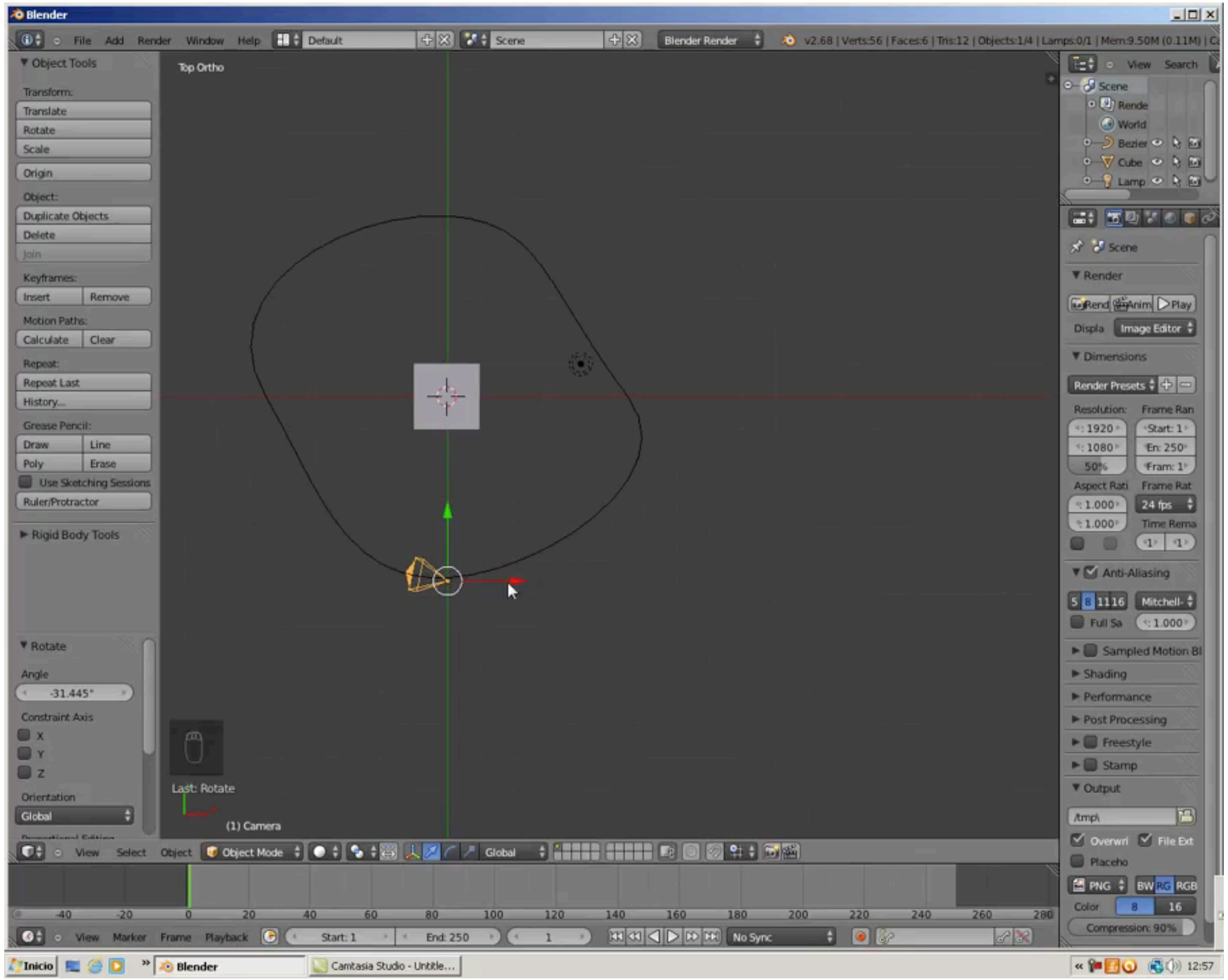
Motivación



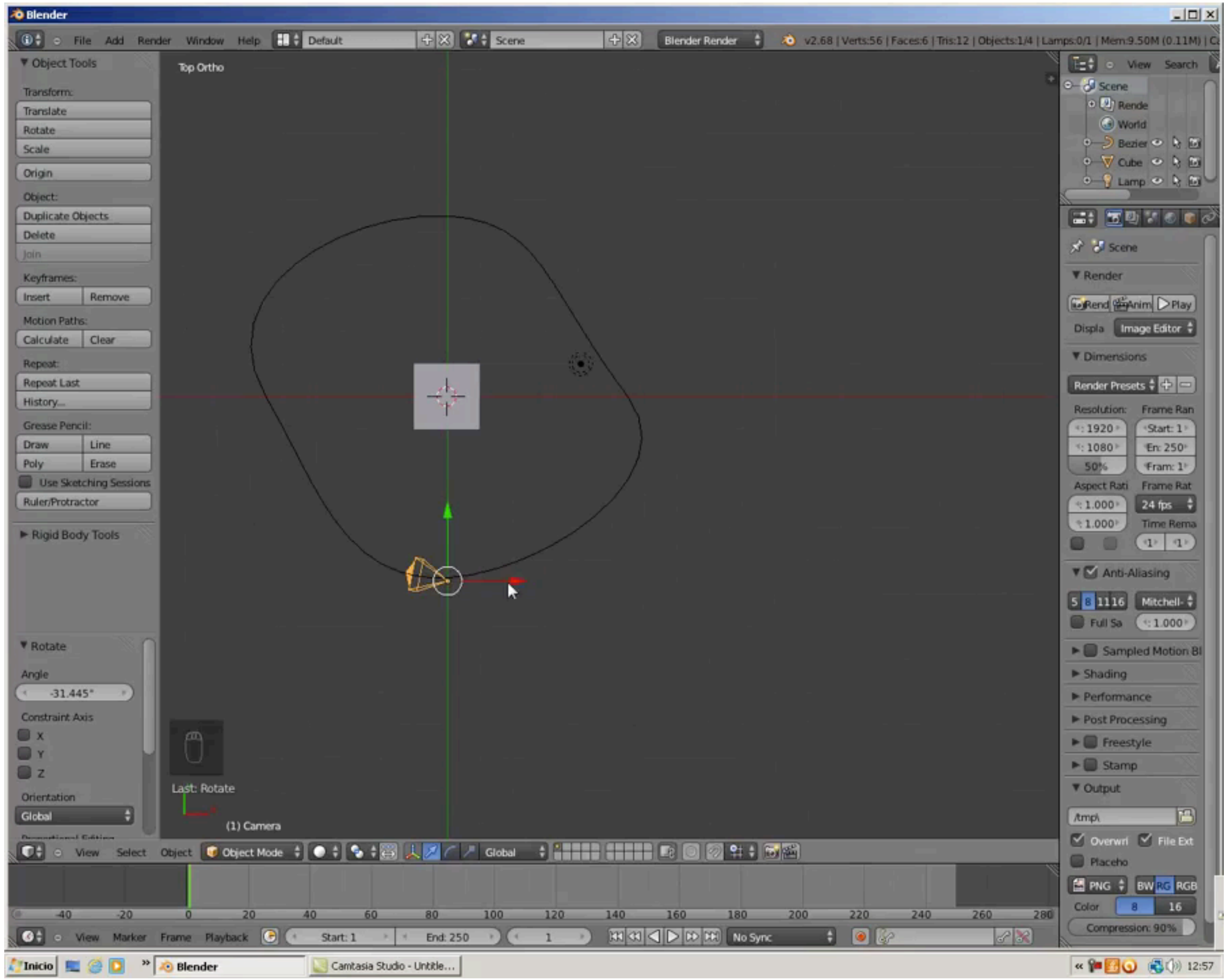




Motivación


Blender
File Add Render Window Help
Default
Scene
Blender Render
v2.68 | Verts:56 | Faces:6 | Tris:12 | Objects:1/4 | Lamps:0/1 | Mem:9.50M (0.11M)
Object Tools
Transform:
Translate
Rotate
Scale
Origin
Object:
Duplicate Objects
Delete
Join
Keyframes:
Insert
Remove
Motion Paths:
Calculate
Clear
Repeat:
Repeat Last
History...
Grease Pencil:
Draw
Line
Poly
Erase
Use Sketching Sessions
Ruler/Protractor
Rigid Body Tools
Rotate
Angle
-31.445°
Constraint Axis
X
Y
Z
Orientation
Global
Top Ortho
Last: Rotate
(1) Camera
View Select Object Object Mode Global
View Marker Frame Playback Start: 1 End: 250 1 No Sync
View Search
Scene
Rende
World
Bezier
Cube
Lamp
Render
Rend Anim Play
Displa Image Editor
Dimensions
Render Presets
Resolution:
Frame Ran
1920
1080
50%
Start: 1
En: 250
Fram: 1
Aspect Rati
Frame Rat
1.000
1.000
24 fps
Time Rema
Anti-Aliasing
5 8 11 16
Mitchell-
Full Sa
1.000
Sampled Motion Bl
Shading
Performance
Post Processing
Freestyle
Stamp
Output
/tmp\
Overwri
File Ext
Placeho
PNG
BW RG RGB
Color
8
16
Compression: 90%
Inicio
Blender
Camtasia Studio - Untitle...
12:57

Motivación


Blender
File Add Render Window Help
Default
Scene
Blender Render
v2.68 | Verts:56 | Faces:6 | Tris:12 | Objects:1/4 | Lamps:0/1 | Mem:9.50M (0.11M)
Object Tools
Transform:
Translate
Rotate
Scale
Origin
Object:
Duplicate Objects
Delete
Join
Keyframes:
Insert
Remove
Motion Paths:
Calculate
Clear
Repeat:
Repeat Last
History...
Grease Pencil:
Draw
Line
Poly
Erase
Use Sketching Sessions
Ruler/Protractor
Rigid Body Tools
Rotate
Angle
-31.445°
Constraint Axis
X
Y
Z
Orientation
Global
Top Ortho
Last: Rotate
(1) Camera
View Select Object Object Mode Global
View Marker Frame Playback Start: 1 End: 250 1 No Sync
View Search
Scene
World
Bezier
Cube
Lamp
Render
Image Editor
Dimensions
Render Presets
Resolution:
1920
1080
50%
Aspect Rati
1.000
1.000
Frame Rat
24 fps
Time Rema
Anti-Aliasing
Mitchell-
Full Sa
1.000
Sampled Motion Bl
Shading
Performance
Post Processing
Freestyle
Stamp
Output
/tmp\
Overwri
File Ext
Placeho
PNG
BW
RGB
Color
8
16
Compression: 90%
Inicio
Blender
Camtasia Studio - Untitle...
12:57

Interpolación

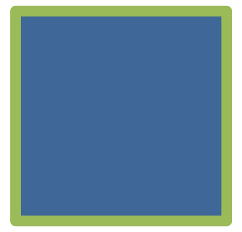
1. Introducción

La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.

Interpolación

1. Introducción

La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.



Interpolación

1. Introducción

La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.

Interpolación

1. Introducción

La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.

Interpolación

1. Introducción

La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.

¿Qué necesitamos?

Interpolación

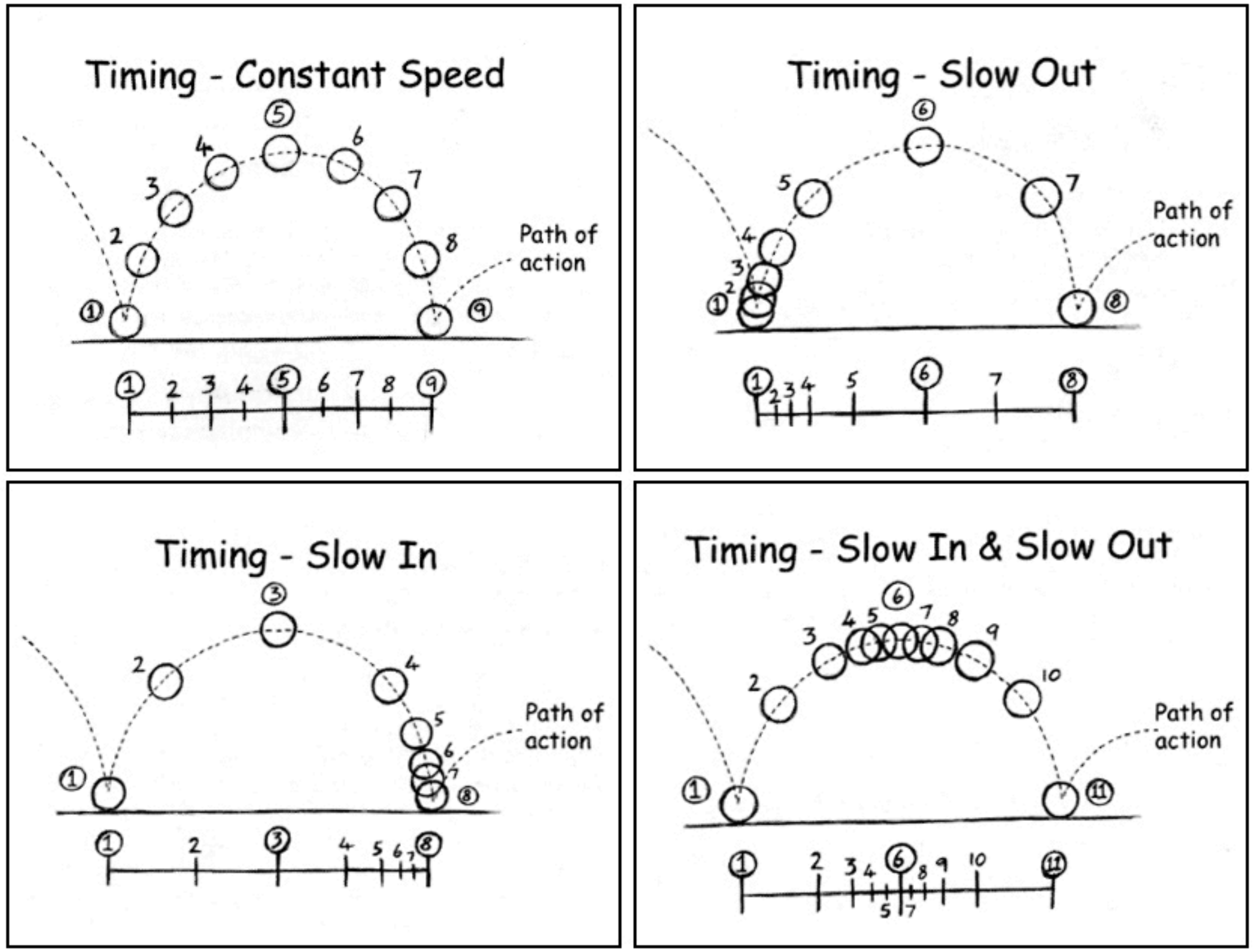
1. Introducción

La mayor parte de los procesos relacionados con la Animación se basan en la Interpolación.

¿Qué necesitamos?

Una **función** de interpolación

- La parametrización de la función en base a la **distancia** recorrida.
- El mantenimiento del control de la posición interpolada en el **tiempo**.



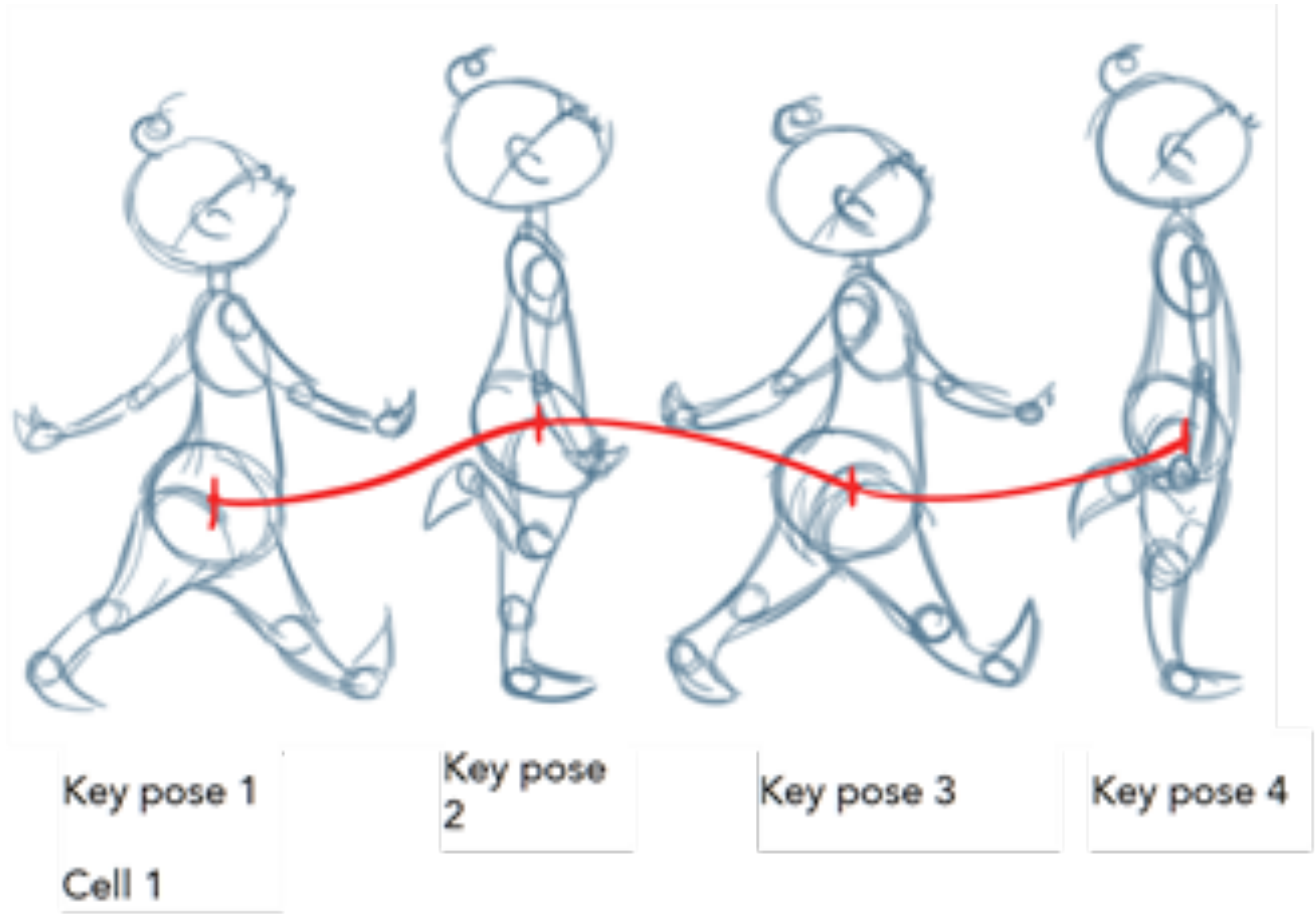
http://gizma.com/easing/#expo3

Interpolación

Animador —> valores asociado con un parámetro en unos **keyframes**.

¿Cómo generar el resto de los valores del parámetro entre los keyframes?

Un keyframe en animación es un dibujo que define los puntos de inicio y fin de cualquier **transición.**



Interpolación

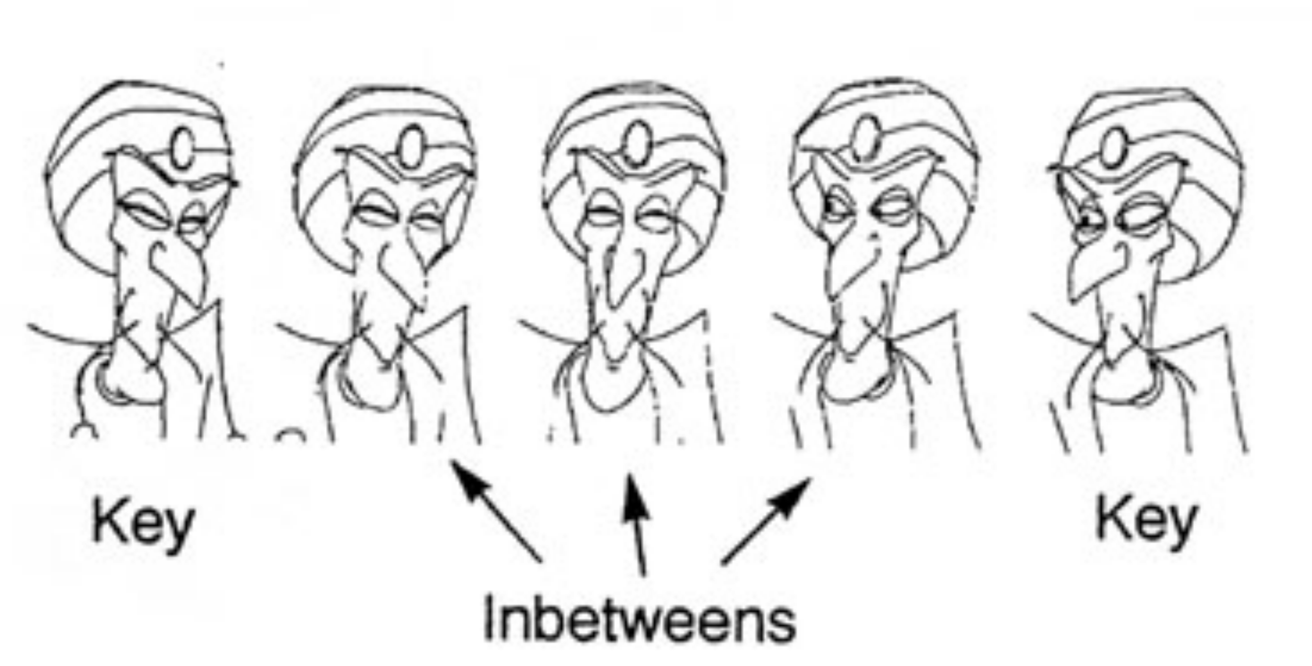
Para vídeo, mínimo 24 fps (frames per second)

Key

Key

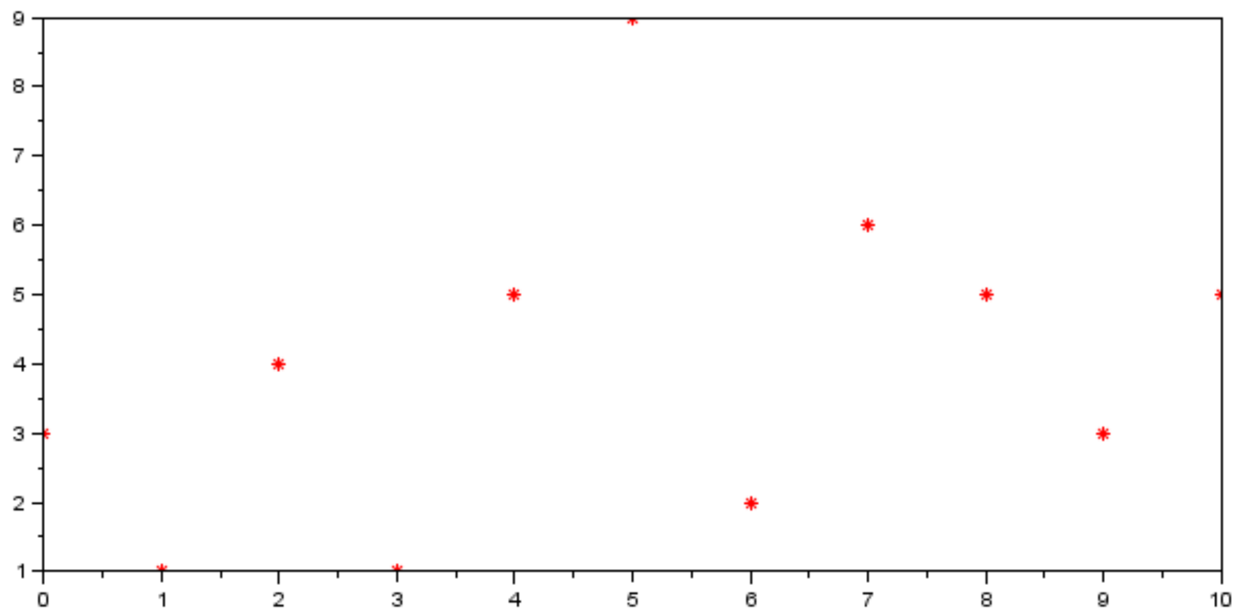
Interpolación

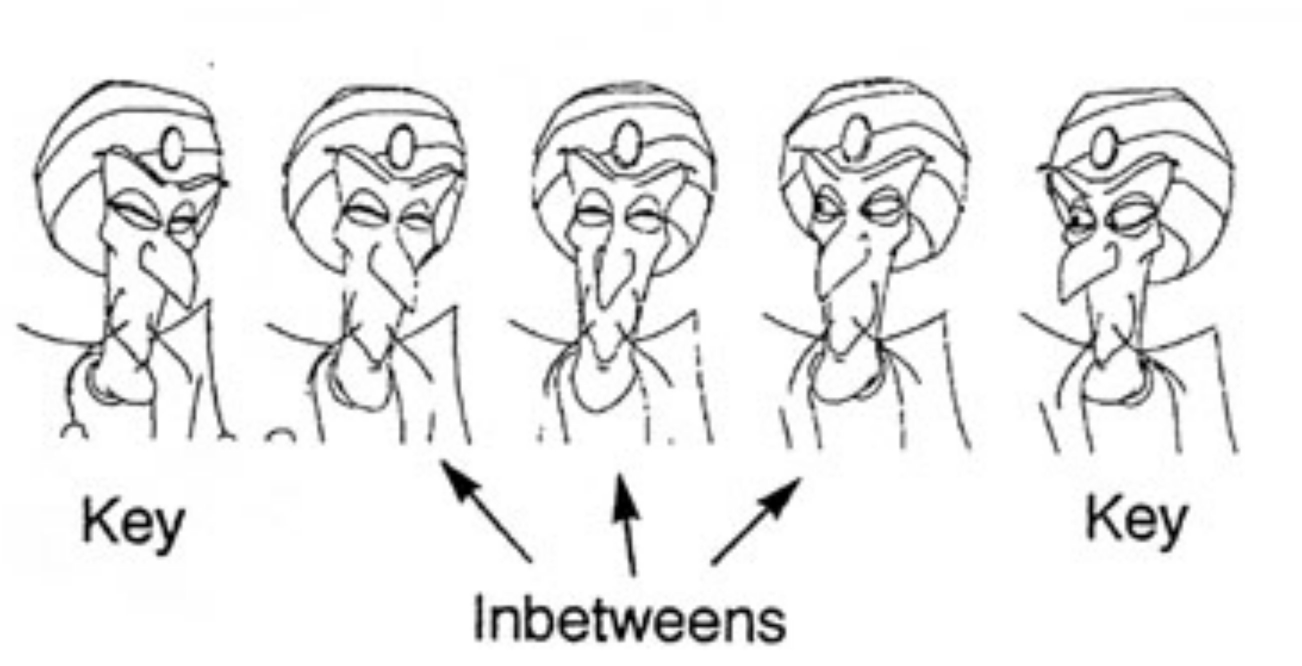
Para vídeo, mínimo 24 fps (frames per second)



Interpolación

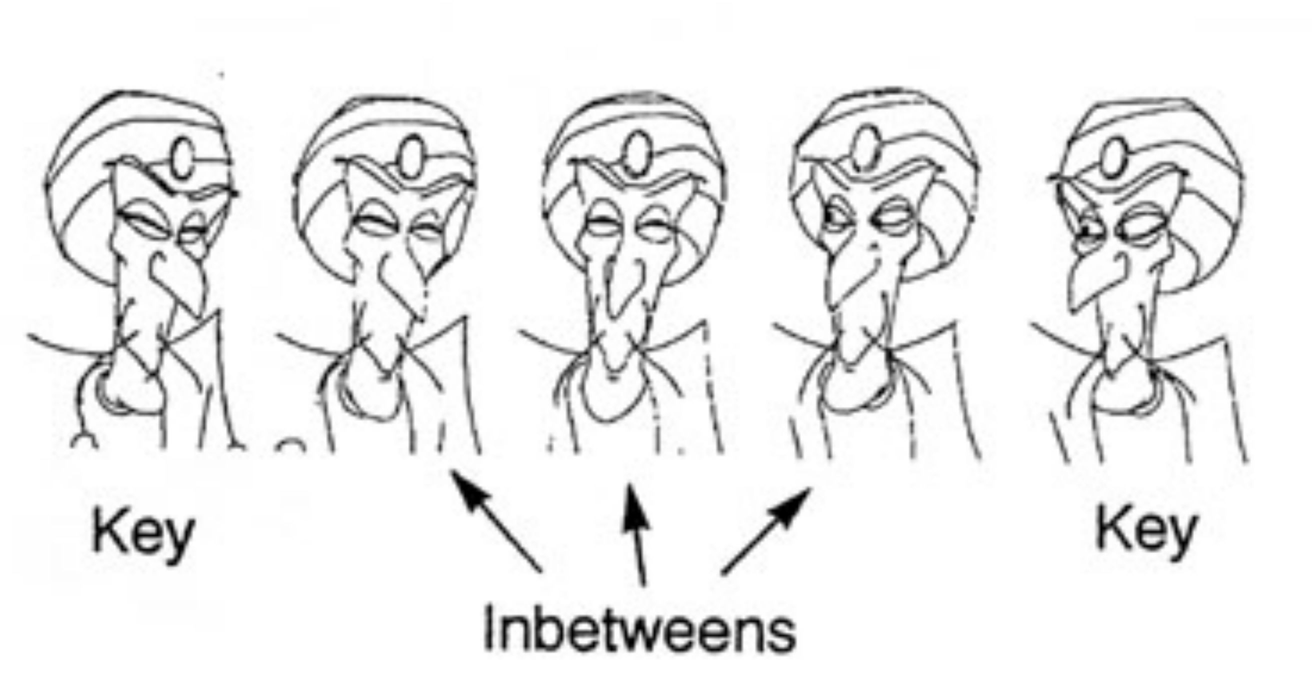
Para vídeo, mínimo 24 fps (frames per second)

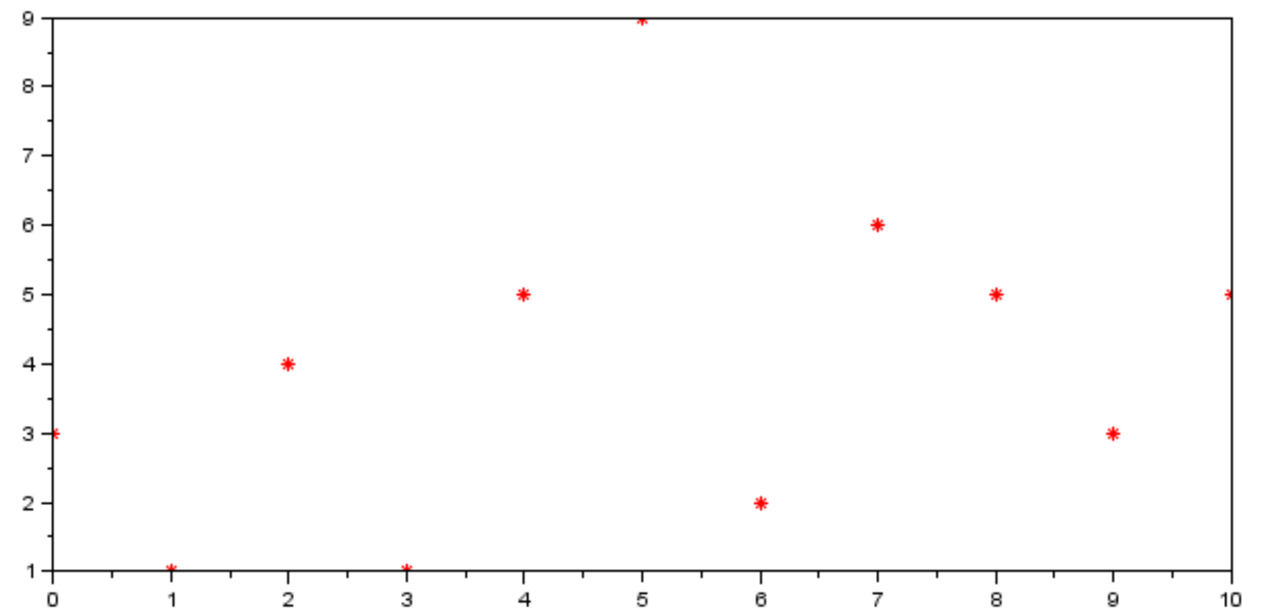


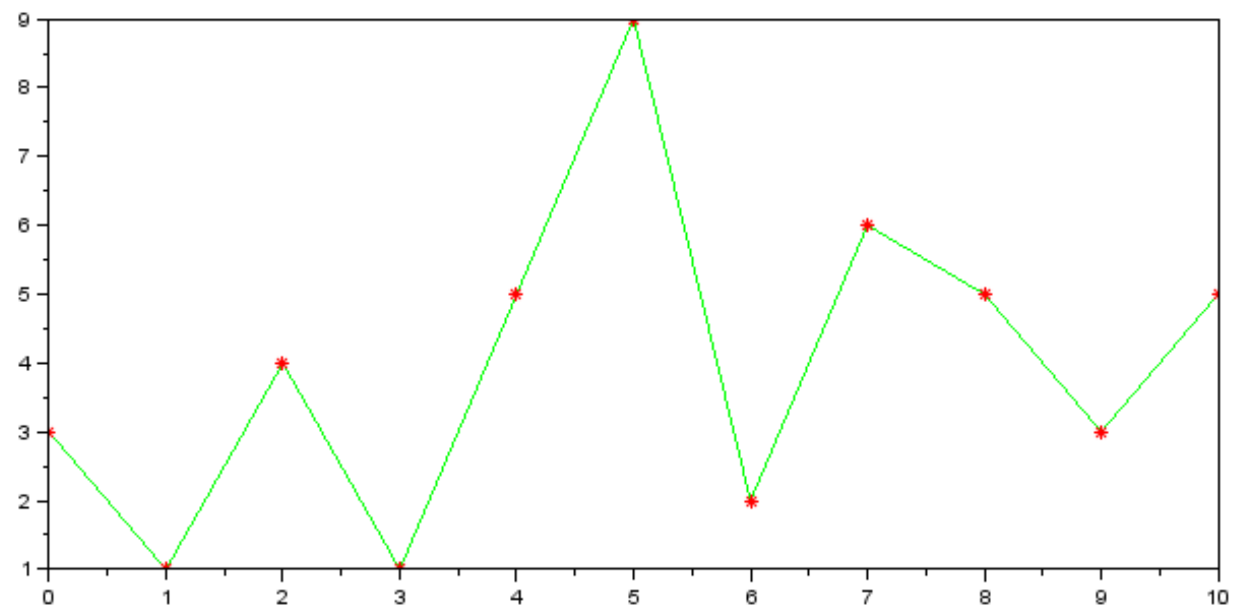


Interpolación

Para vídeo, mínimo 24 fps (frames per second)

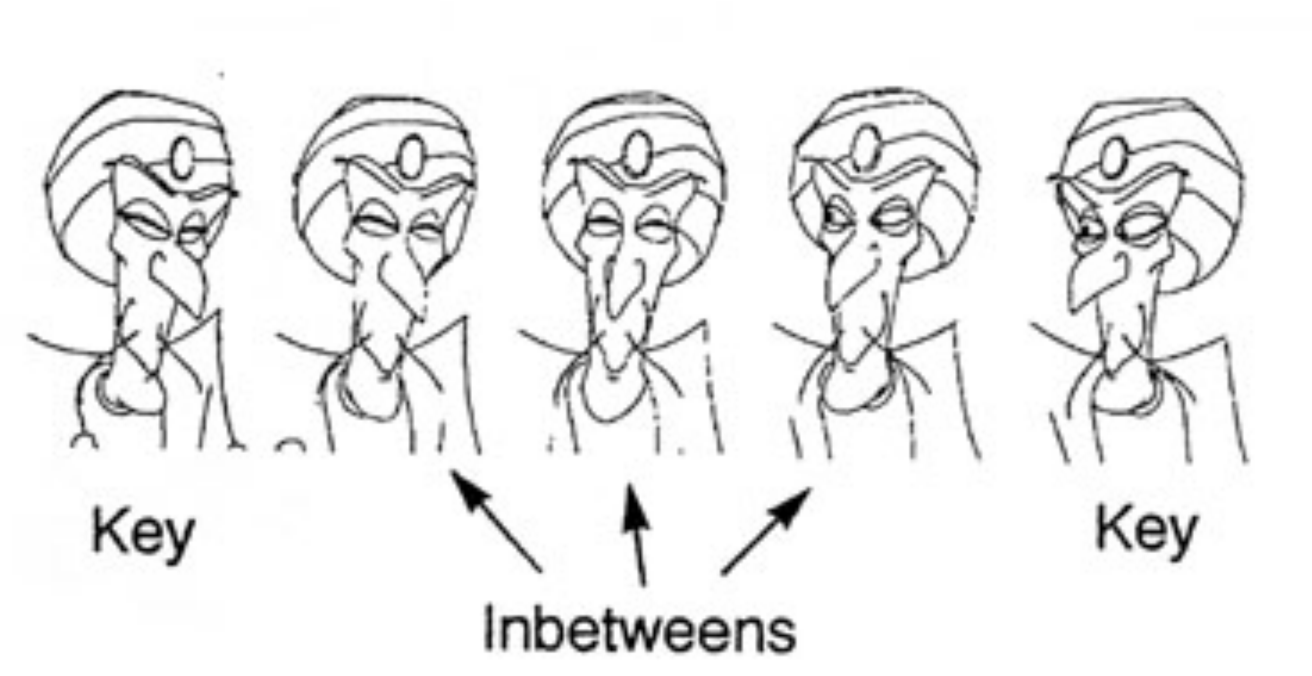


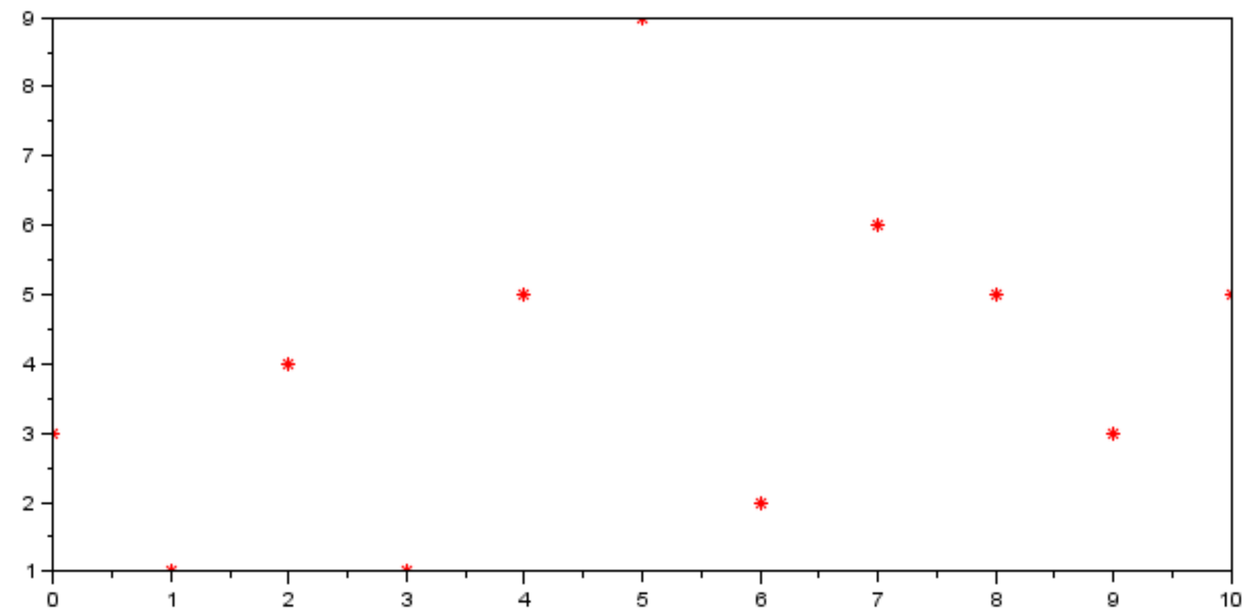


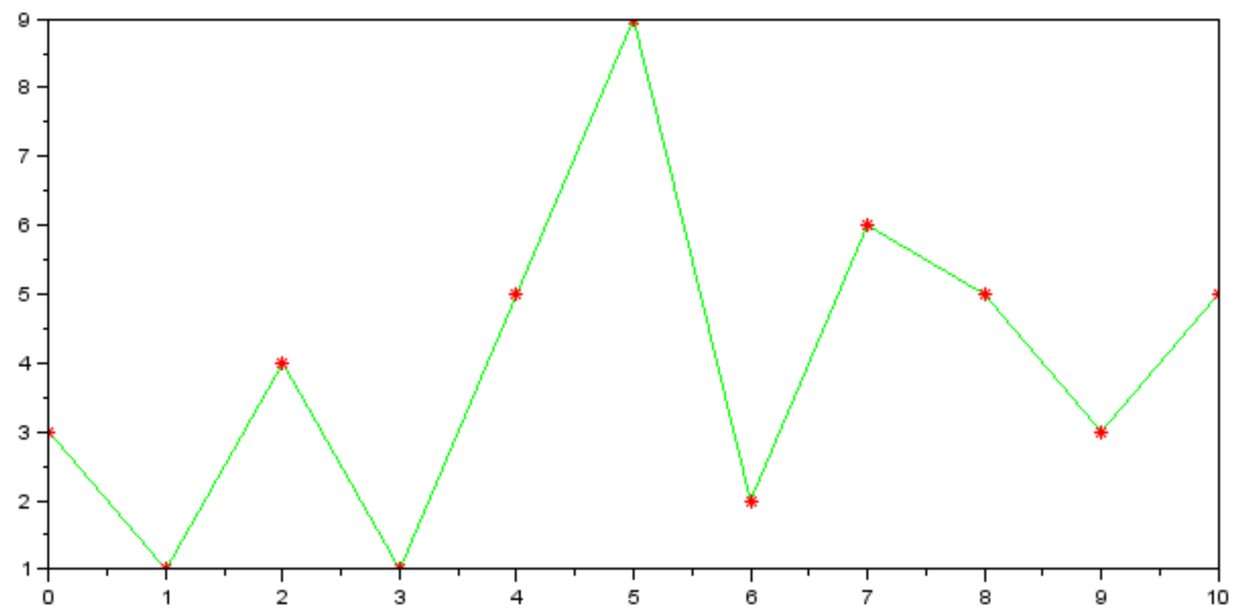


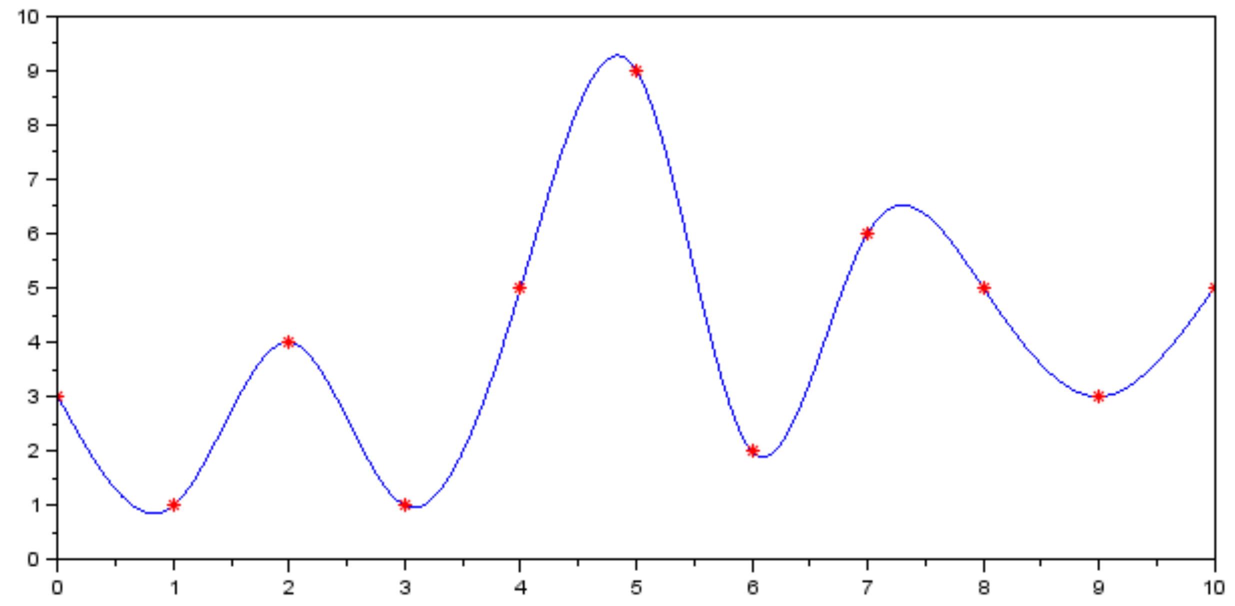
Interpolación

Para vídeo, mínimo 24 fps (frames per second)









Interpolación

2.- Búsqueda de la función apropiada.

¿Cómo elegir la técnica de interpolación más adecuada? ¿una vez seleccionada, cómo aplicarla a mi caso de animación?

Interpolación vs Aproximación

An interpolating spline in which the spline passes through the interior control points

An approximating spline in which only the endpoints are interpolated; the interior control points are used only to design the curve

Interpolación

En el caso de ser puntos de la curva, forman parte de un spline de interpolación.

Un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios. Veremos que se van a usar normalmente polinomios de orden bajo para no realizar cambios bruscos en la forma a aproximar.

En el caso de ser una aproximación, los puntos dados son un ejemplo de cómo diseñar el spline por aproximación, y en cualquier caso, permite más margen en el diseño de la curva.

Interpolación

Interpolación:

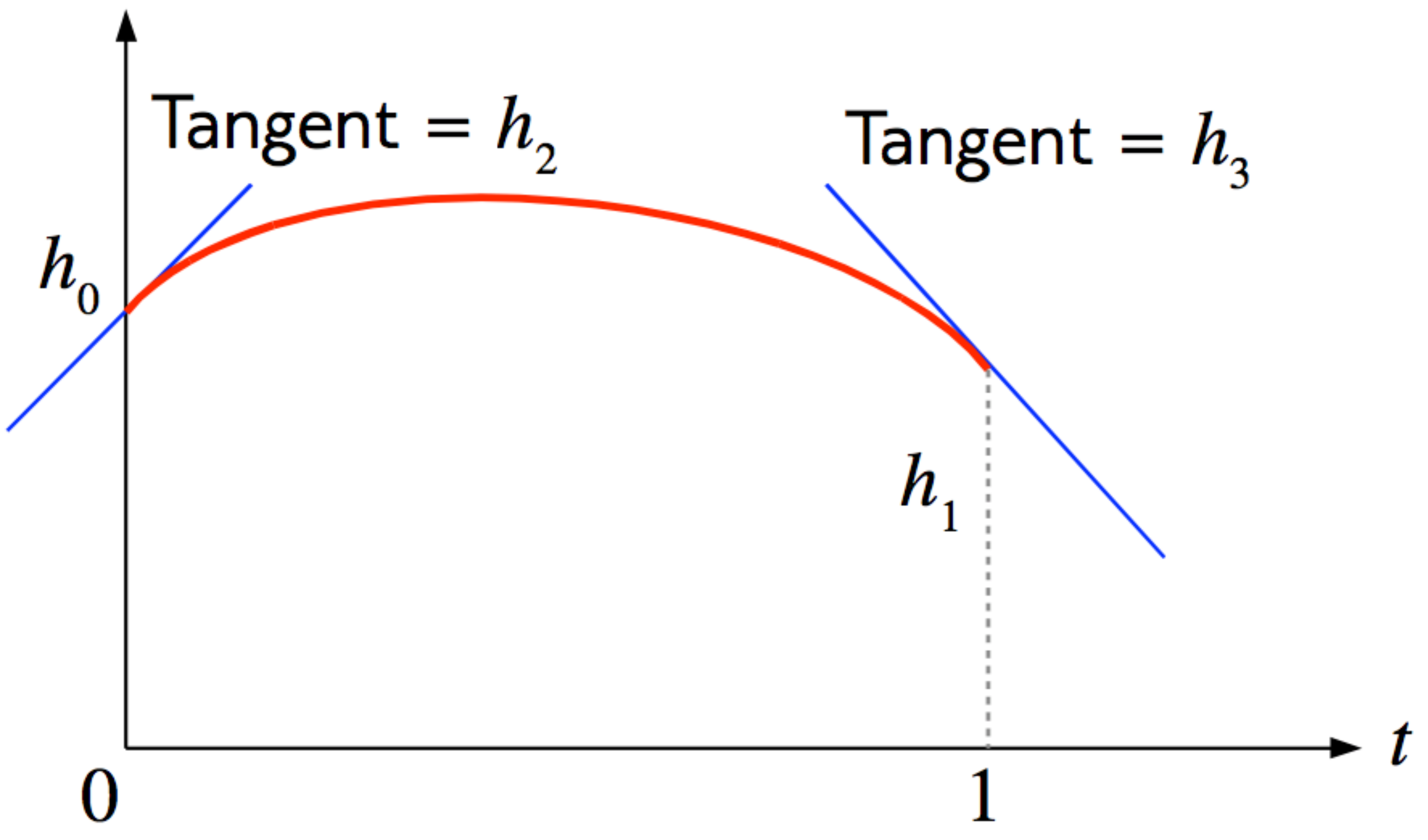
- **Hermite**: Requiere saber tangentes en los puntos finales.
- **Polinomio interpolador de Lagrange**
- **Splines, Catmull-Rom**: Sólo necesita saber los puntos por donde pasaría la curva. Defino por mi mismo las tangentes.

Aproximaciones:

- **Curvas de Bezier.**
- **B-splines.**

Cubic Hermite Interpolation

- Specify positions h_0, h_1 and tangents (slopes, derivatives) h_2, h_3 at two points: $t = 0$ and $t = 1$



Cubic Hermite Interpolation

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

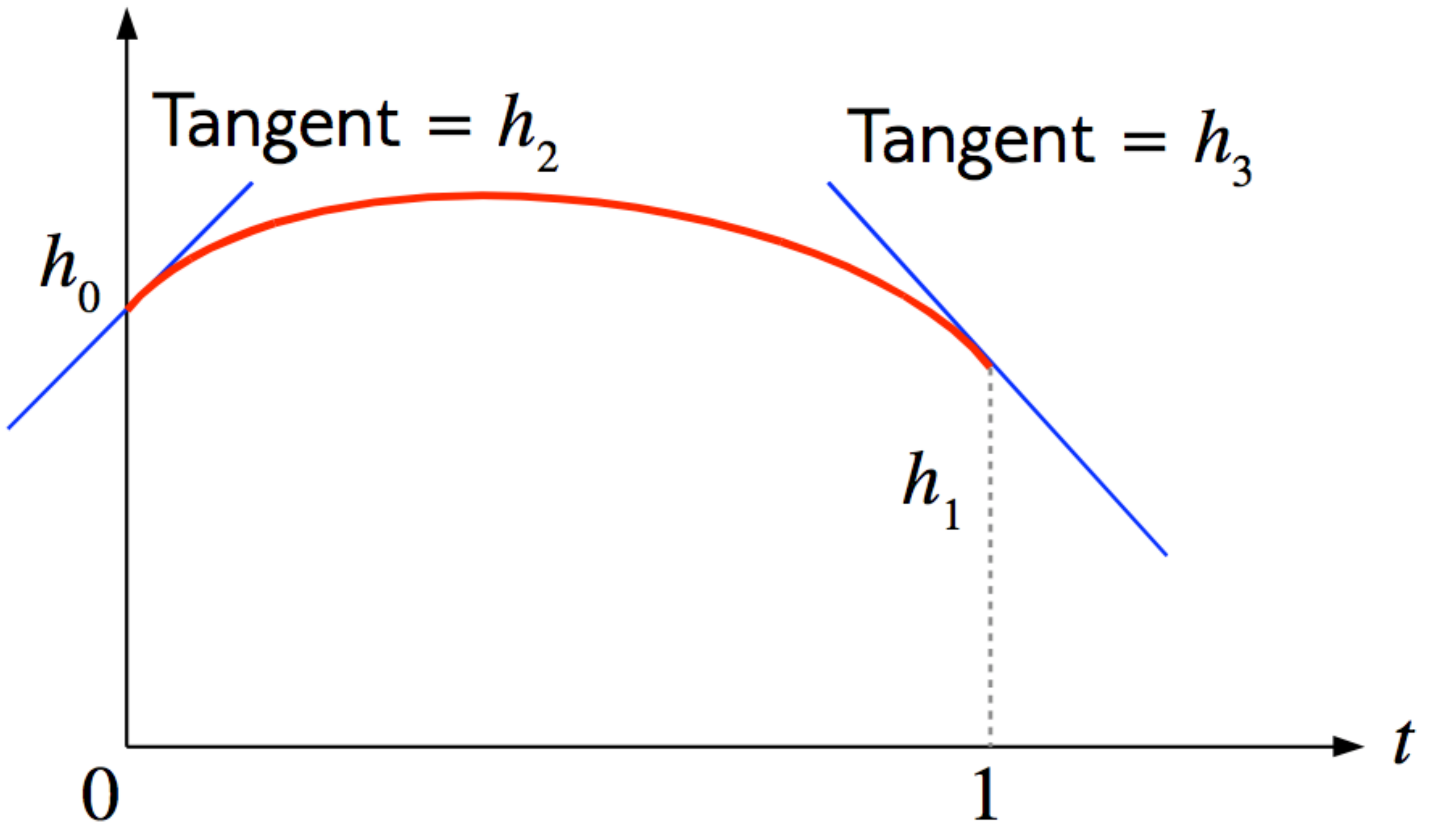
$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$h_0 = P(0) =$$

$$h_1 = P(1) =$$

$$h_2 = P'(0) =$$

$$h_3 = P'(1) =$$



Cubic Hermite Interpolation

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

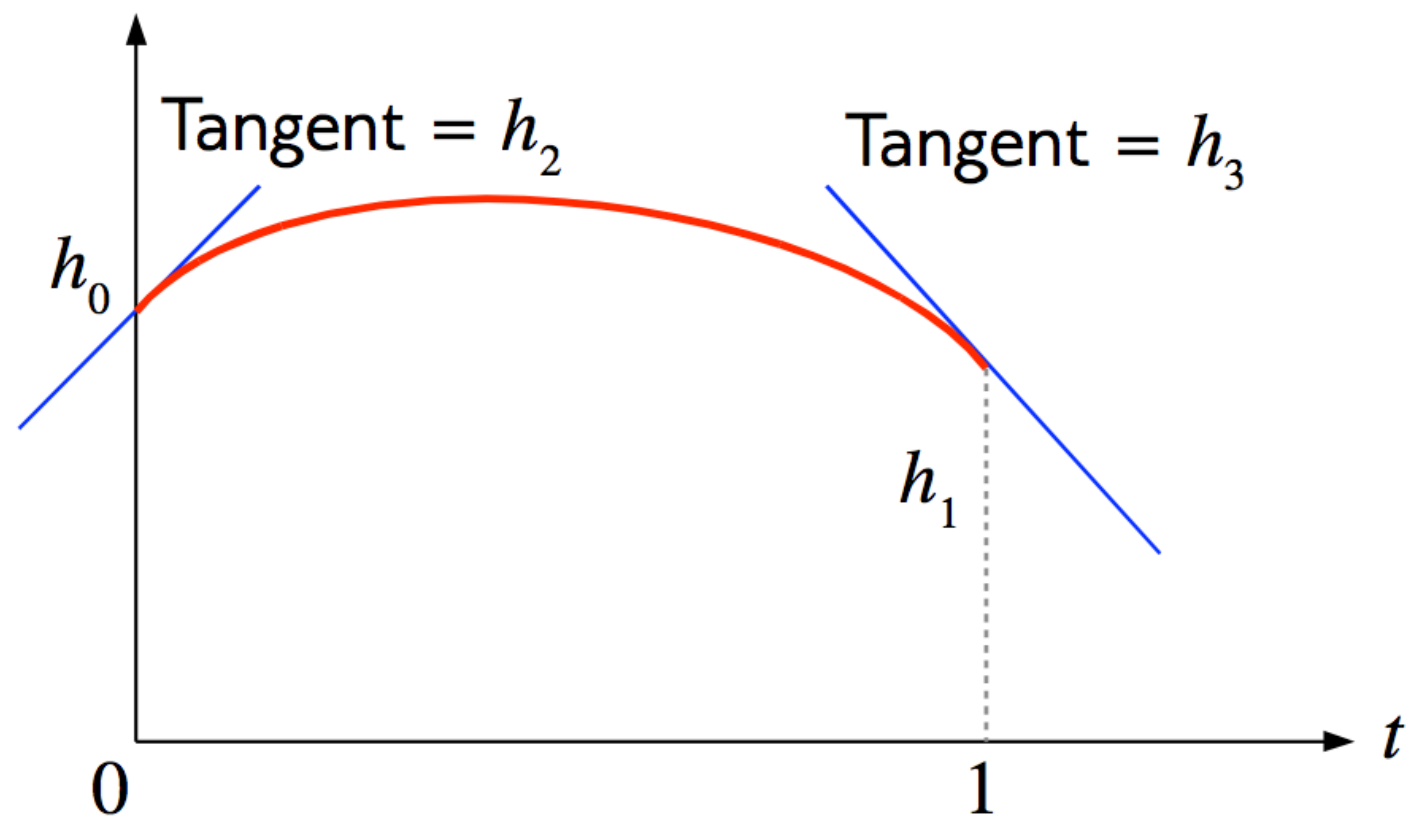
$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$h_0 = P(0) = d$$

$$h_1 = P(1) =$$

$$h_2 = P'(0) =$$

$$h_3 = P'(1) =$$



Cubic Hermite Interpolation

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

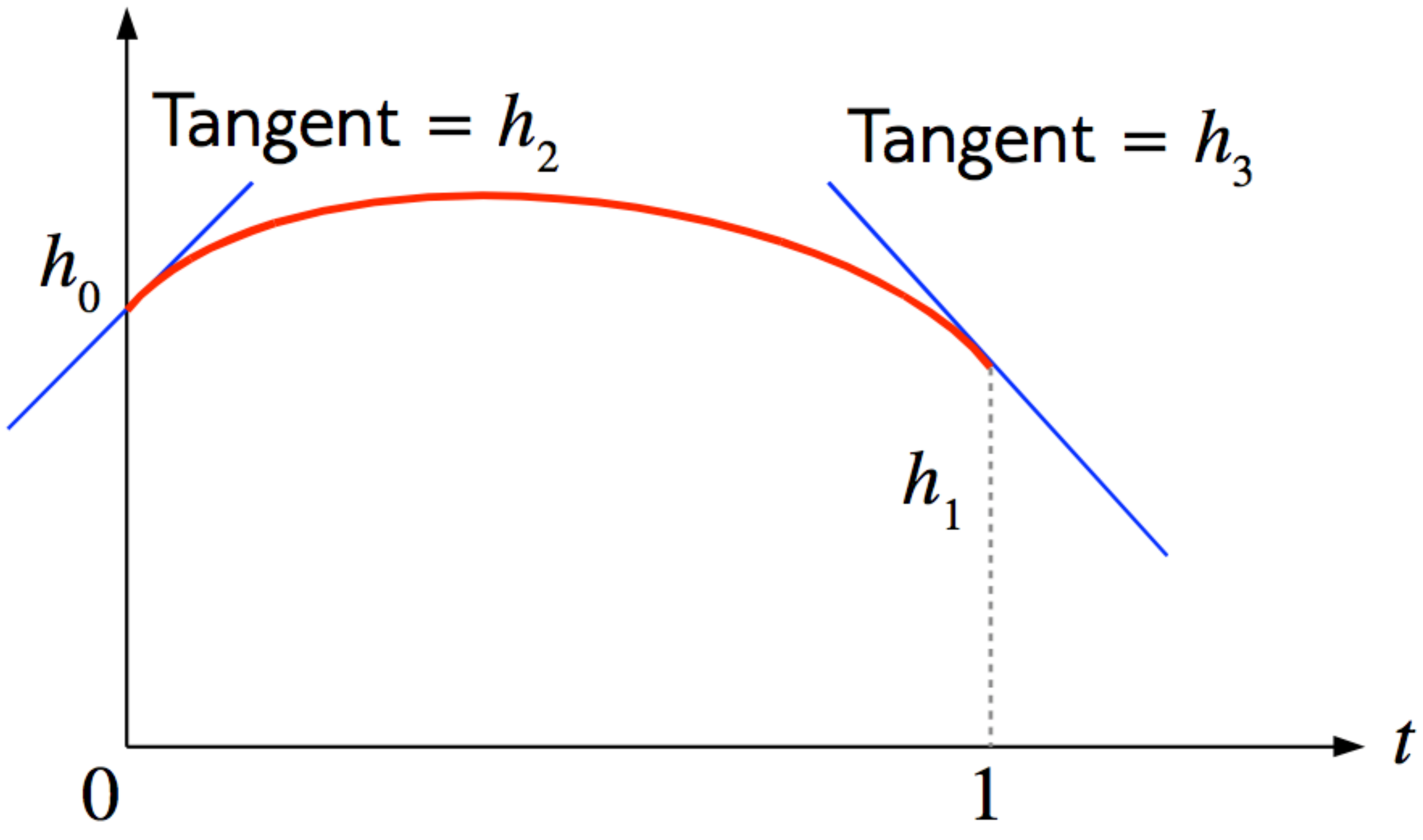
$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$h_0 = P(0) = d$$

$$h_1 = P(1) = a + b + c + d$$

$$h_2 = P'(0) =$$

$$h_3 = P'(1) =$$



Cubic Hermite Interpolation

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

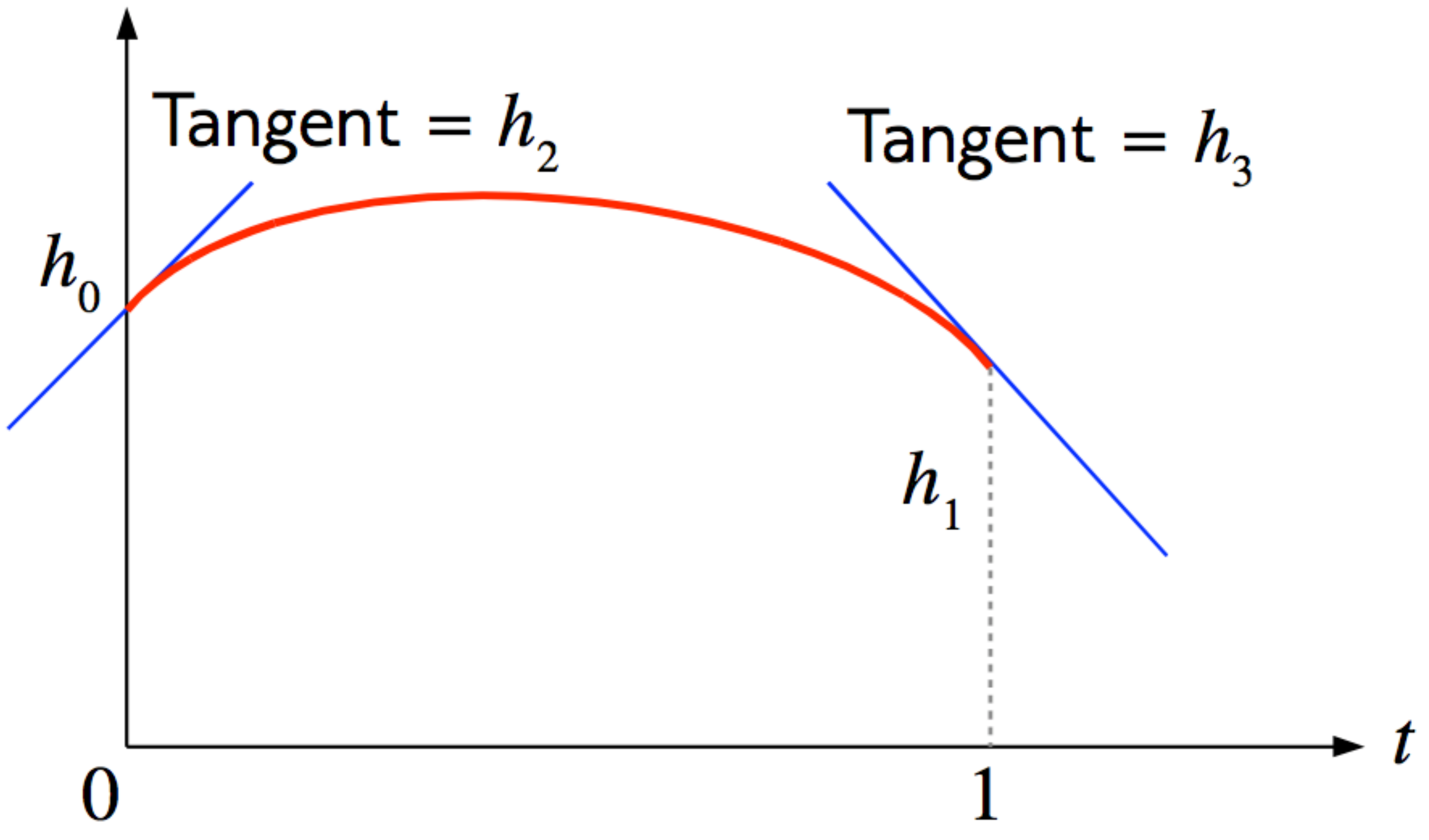
$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$h_0 = P(0) = d$$

$$h_1 = P(1) = a + b + c + d$$

$$h_2 = P'(0) = c$$

$$h_3 = P'(1) =$$



Cubic Hermite Interpolation

$$P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

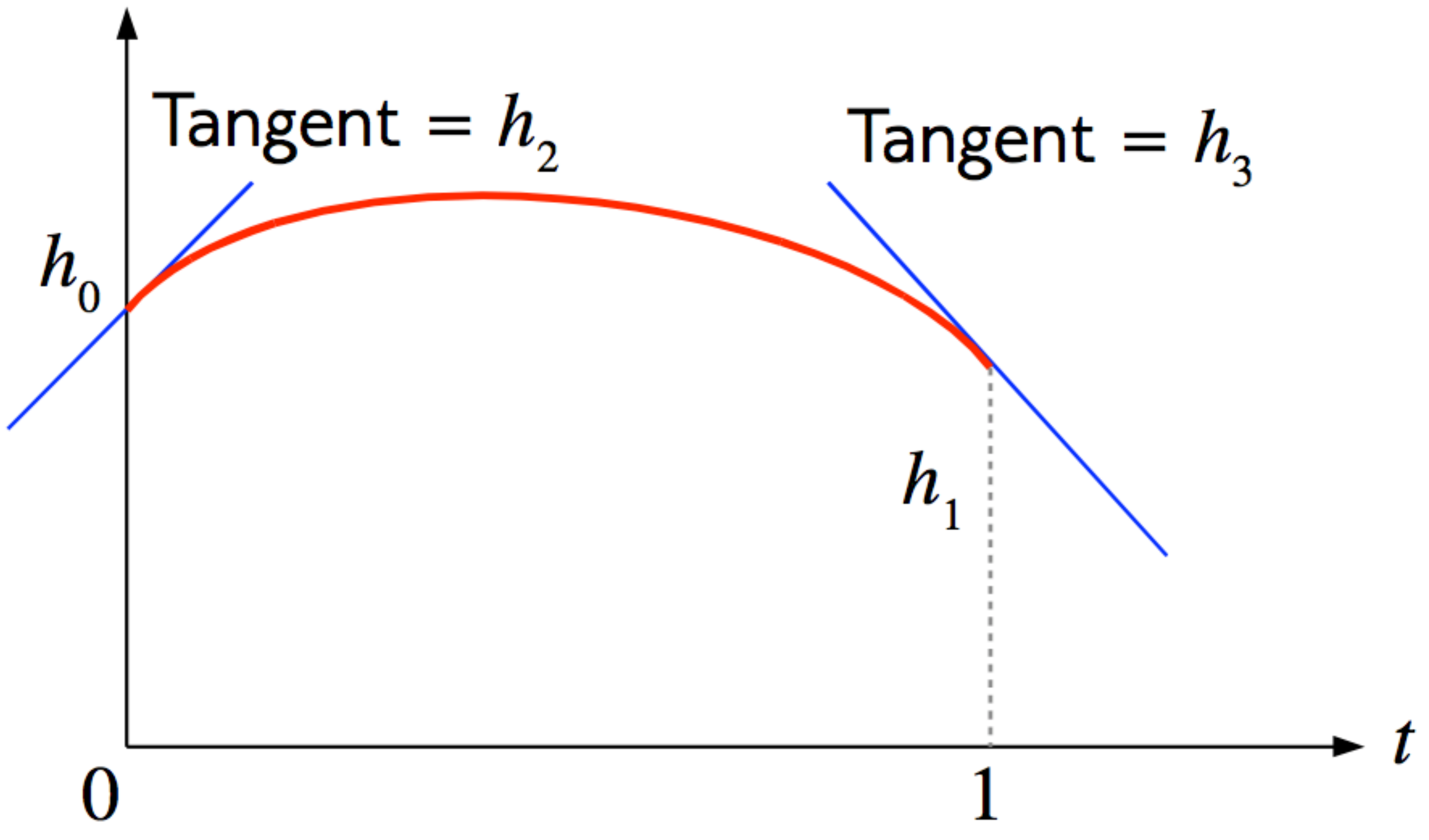
$$P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$h_0 = P(0) = d$$

$$h_1 = P(1) = a + b + c + d$$

$$h_2 = P'(0) = c$$

$$h_3 = P'(1) = 3a + 2b + c$$



Matrix Representation

$$h_0 = d$$
$$h_1 = a + b + c + d$$
$$h_2 = c$$
$$h_3 = 3a + 2b + c$$

Hermite constraint matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{C}\,\mathbf{a}$$

Matrix Representation

$$\mathbf{h} = \mathbf{C}\mathbf{a} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{h}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\textit{Hermite basis matrix}} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(C^{-1})^T} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(C^{-1})^T} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix}}_{\textit{Hermite basis functions}}$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(\mathrm{C}^{-1})^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix}}_{\textit{Hermite basis functions}}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} h_i H_i(t)$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(C^{-1})^T} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix}}_{\textit{Hermite basis functions}}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} h_i H_i(t)$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(C^{-1})^T} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix}}_{\textit{Hermite basis functions}}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} h_i H_i(t)$$

Matrix Representation of Polynomials

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

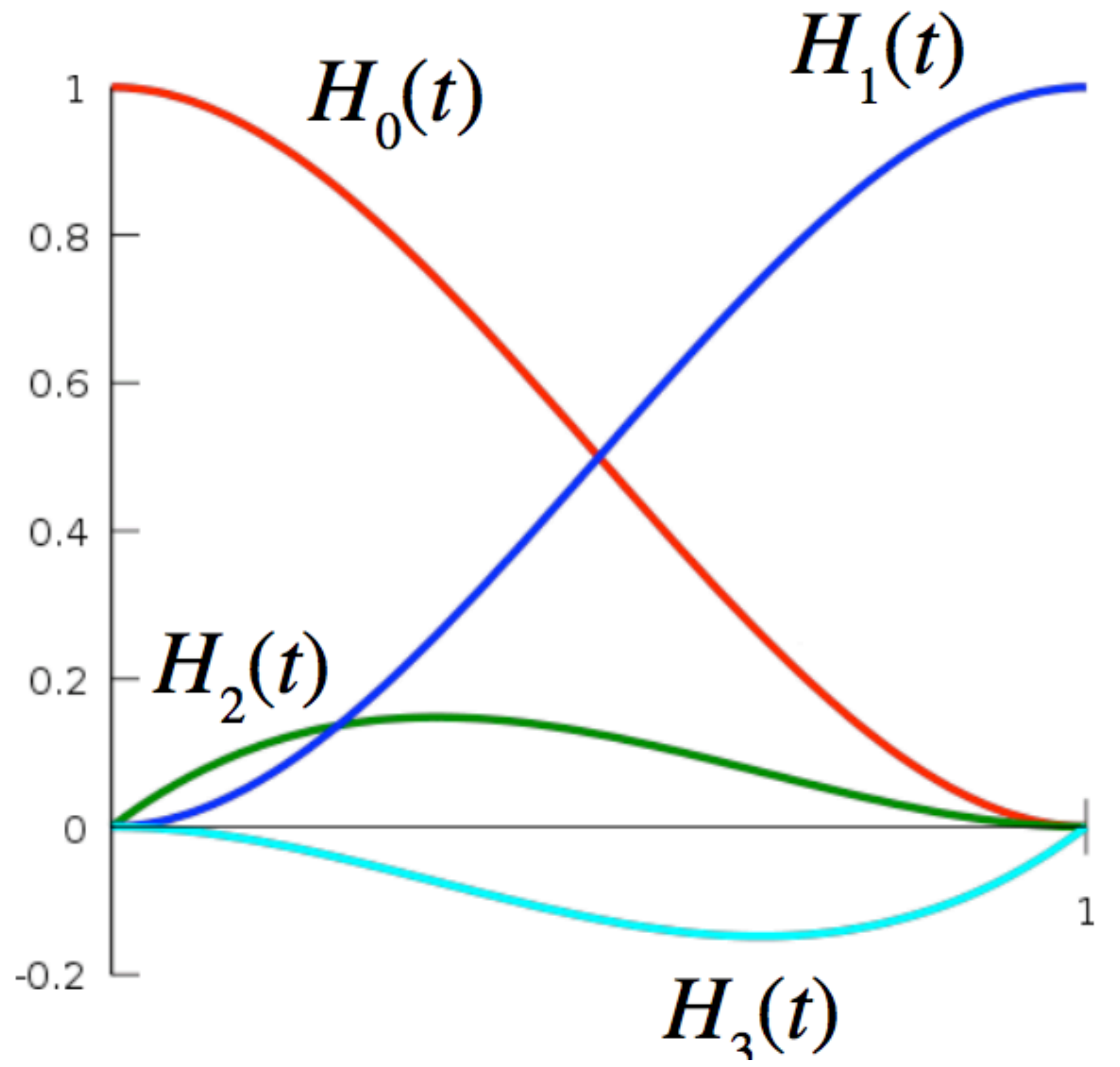
$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(C^{-1})^T} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix}}_{\text{Hermite basis functions}}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} h_i H_i(t)$$

Hermite Basis Functions

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$H_3(t) = t^3 - t^2$$



$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} h_i H_i(t)$$

Interpolación Hermite

Propiedades importantes

- Requiere de la disponibilidad de las primeras derivadas
- Si hay más de 2 puntos la continuidad se cumple de manera que la tangente a la curva i en el punto final es la tangente a la curva i+1 en el punto inicial.

Interpolación

Interpolación Hermite. Ejemplo 1.

Encontrar un polinomio $P(x) \in \mathcal{P}_3(R)$ *tal que:*

$$P(0) = 1,\ P(1) = 1,\ P'(0) = 0,\ P'(1) = 1.$$

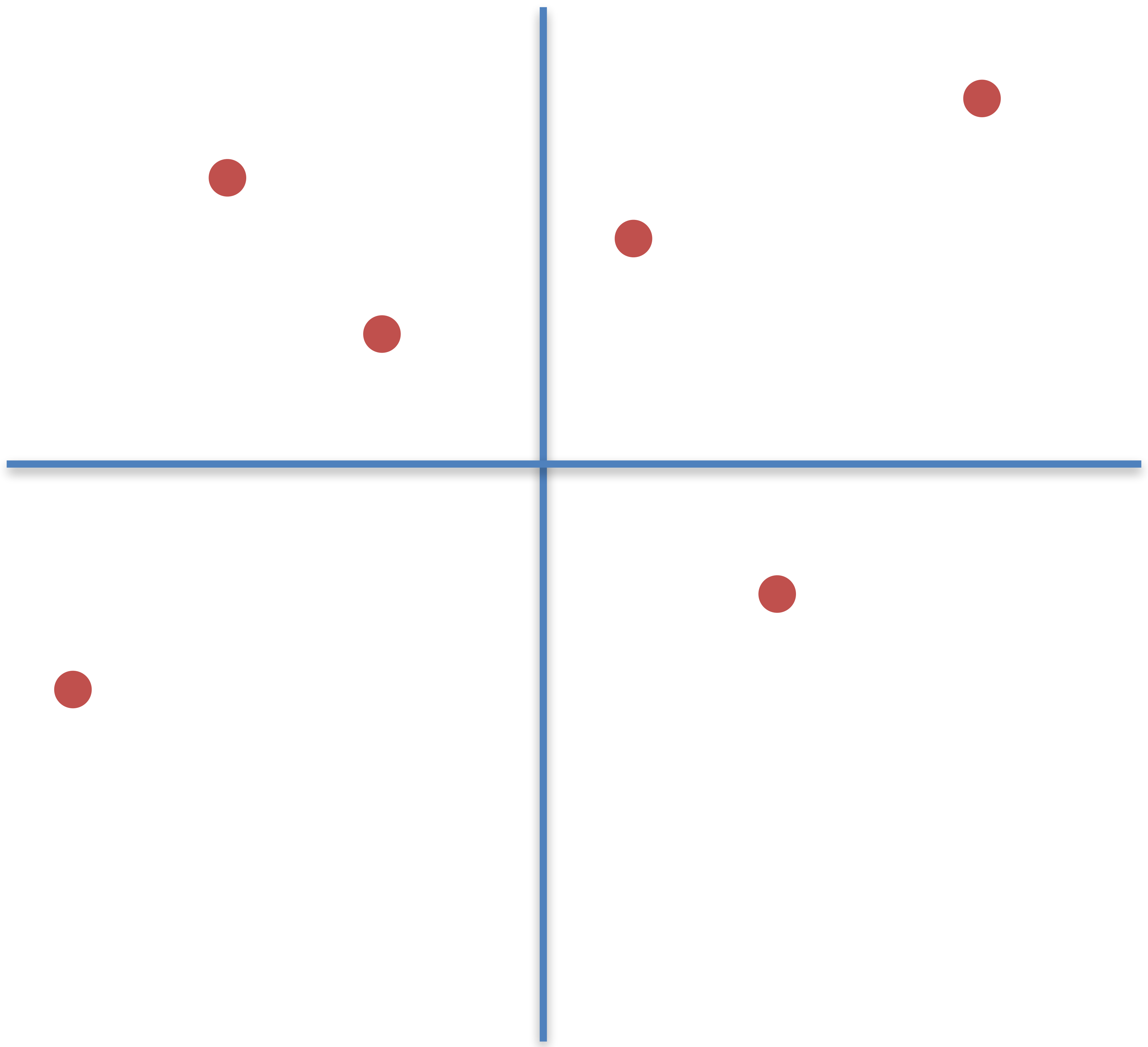
MATLAB demo

or https://octave-online.net/

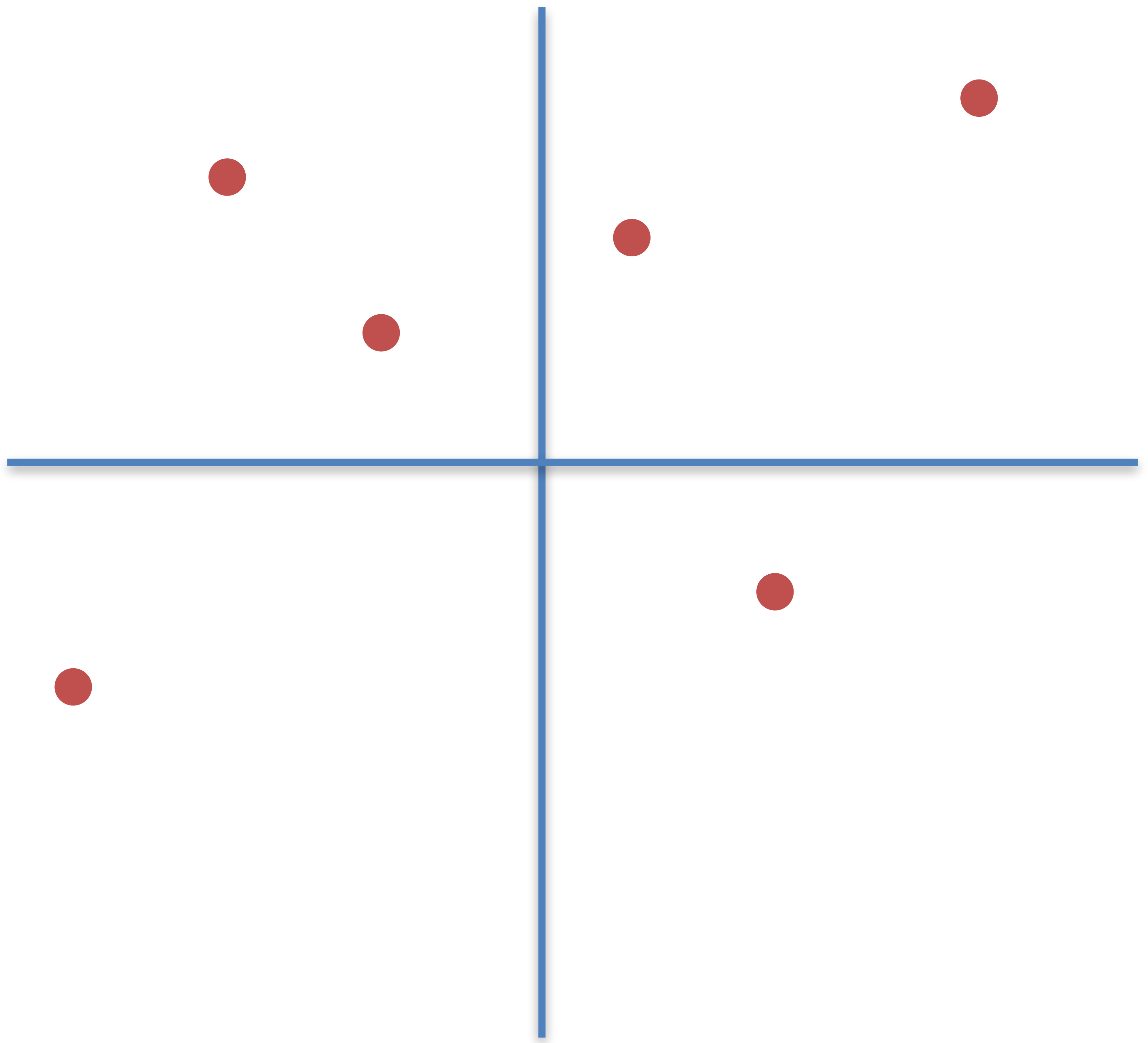
MATLAB ejercicios

http://dancasas.github.io/teaching/AC-2019/ejercicios.html

Polinomio interpolado de Lagrange



Polinomio interpolado de Lagrange



Polinomio interpolado de Lagrange

Dada la tabla de valores

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

donde

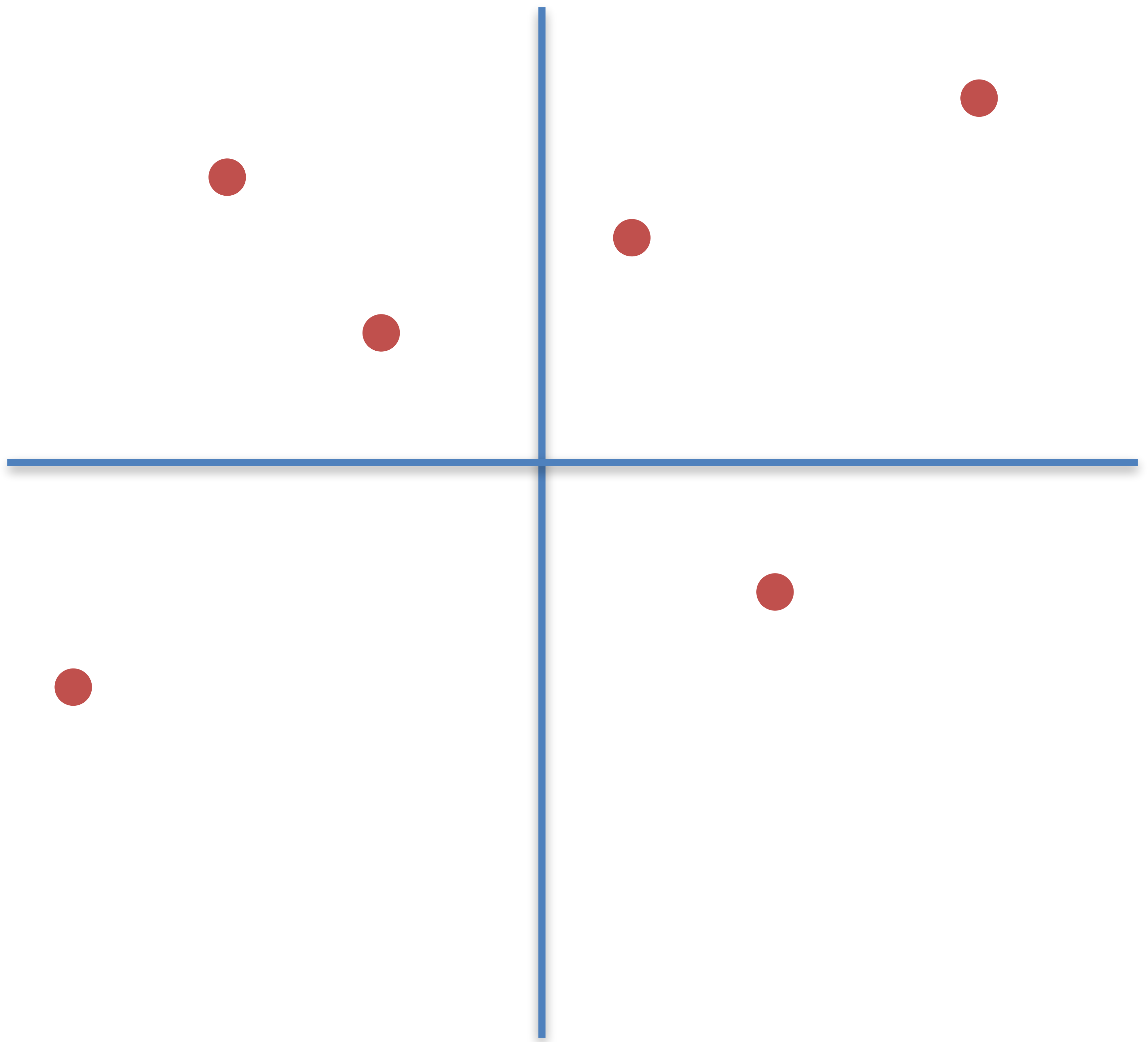
- $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ abscisas distintas.
- $y_0, y_1, \ldots, y_n$ son $n+1$ valores arbitrarios.

Queremos determinar un polinomio de grado $\leq n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

que verifique las $n+1$ condiciones

$$P_n(x_j) = y_j, \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, n.$$



Polinomio interpolado de Lagrange

Forma de Lagrange

$$P_n(x) = l_0(x)\, y_0 + l_1(x)\, y_1 + \cdots + l_n(x)\, y_n.$$

Polinomio interpolado de Lagrange

Forma de Lagrange

$$P_n(x) = l_0(x)\,y_0 + l_1(x)\,y_1 + \cdots + l_n(x)\,y_n.$$

Polinomio interpolado de Lagrange

Forma de Lagrange

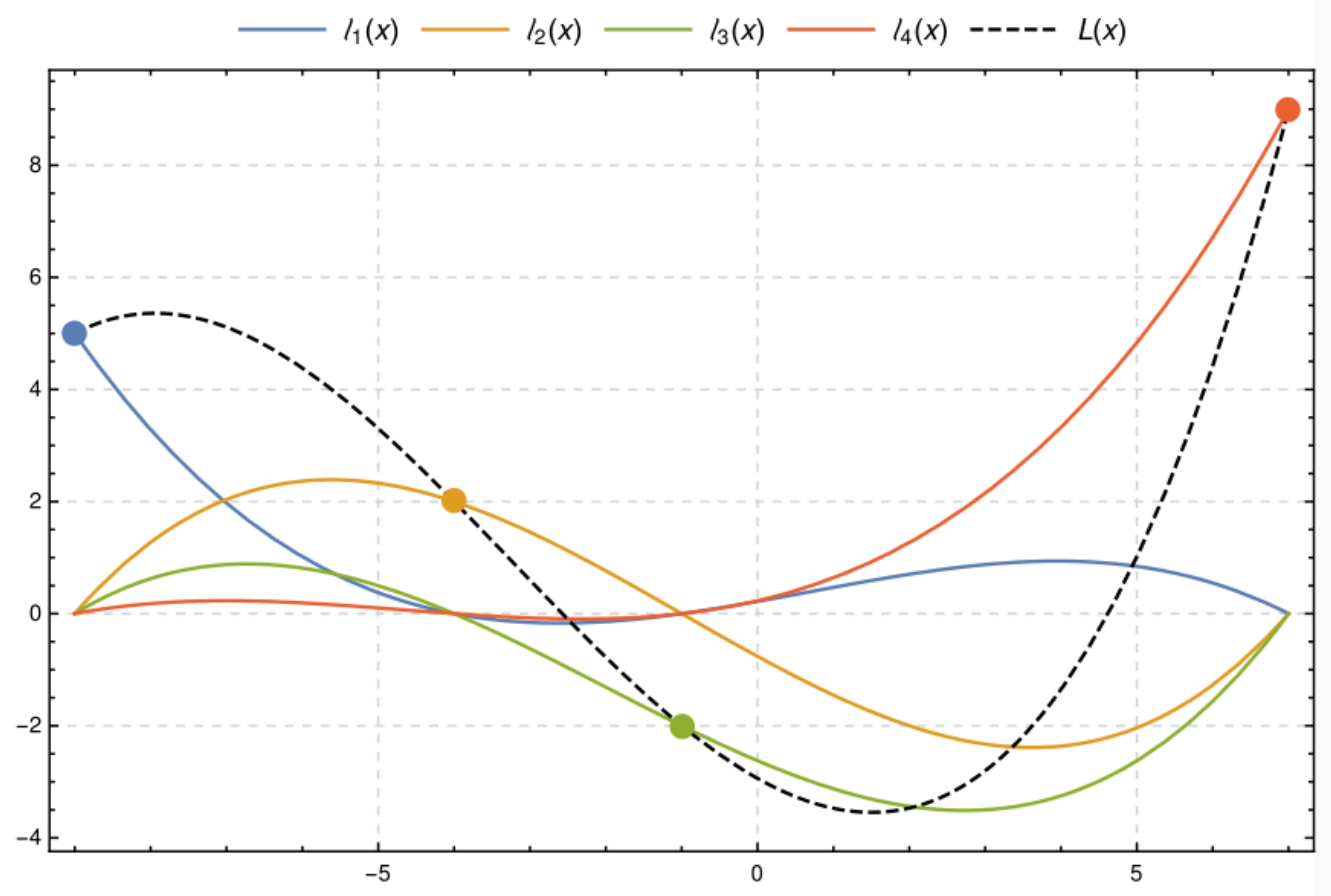
$$P_n(x) = l_0(x)\,y_0 + l_1(x)\,y_1 + \cdots + l_n(x)\,y_n.$$

Los polinomios $l_j(x)$ se denominan *polinomios componentes* y se caracterizan por las propiedades

$$l_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k, \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k. \end{cases}$$

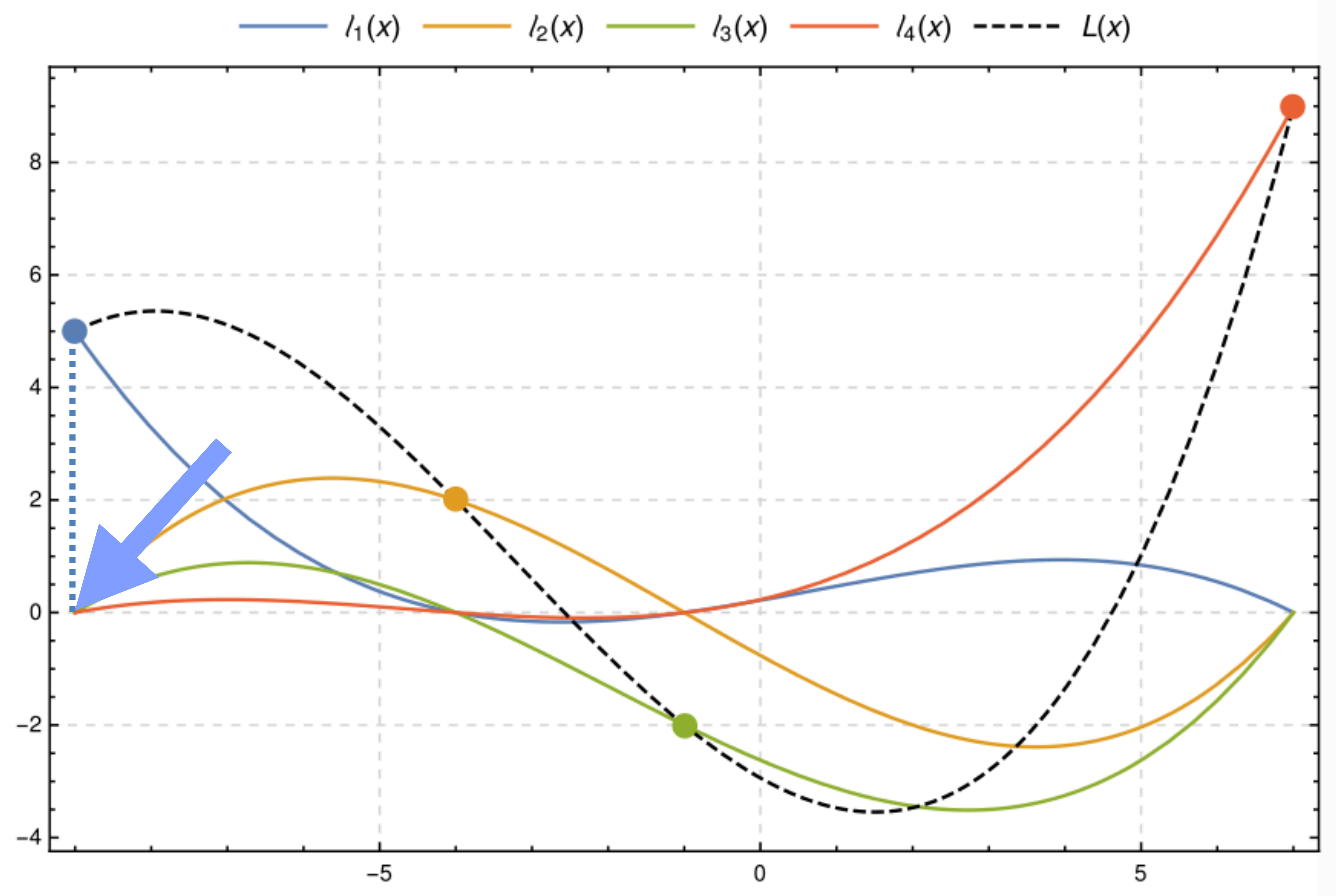
Es decir, el polinomio componente $l_j(x)$ vale 1 en su nodo x_j y se anula en los restantes.

Polinomio interpolado de Lagrange



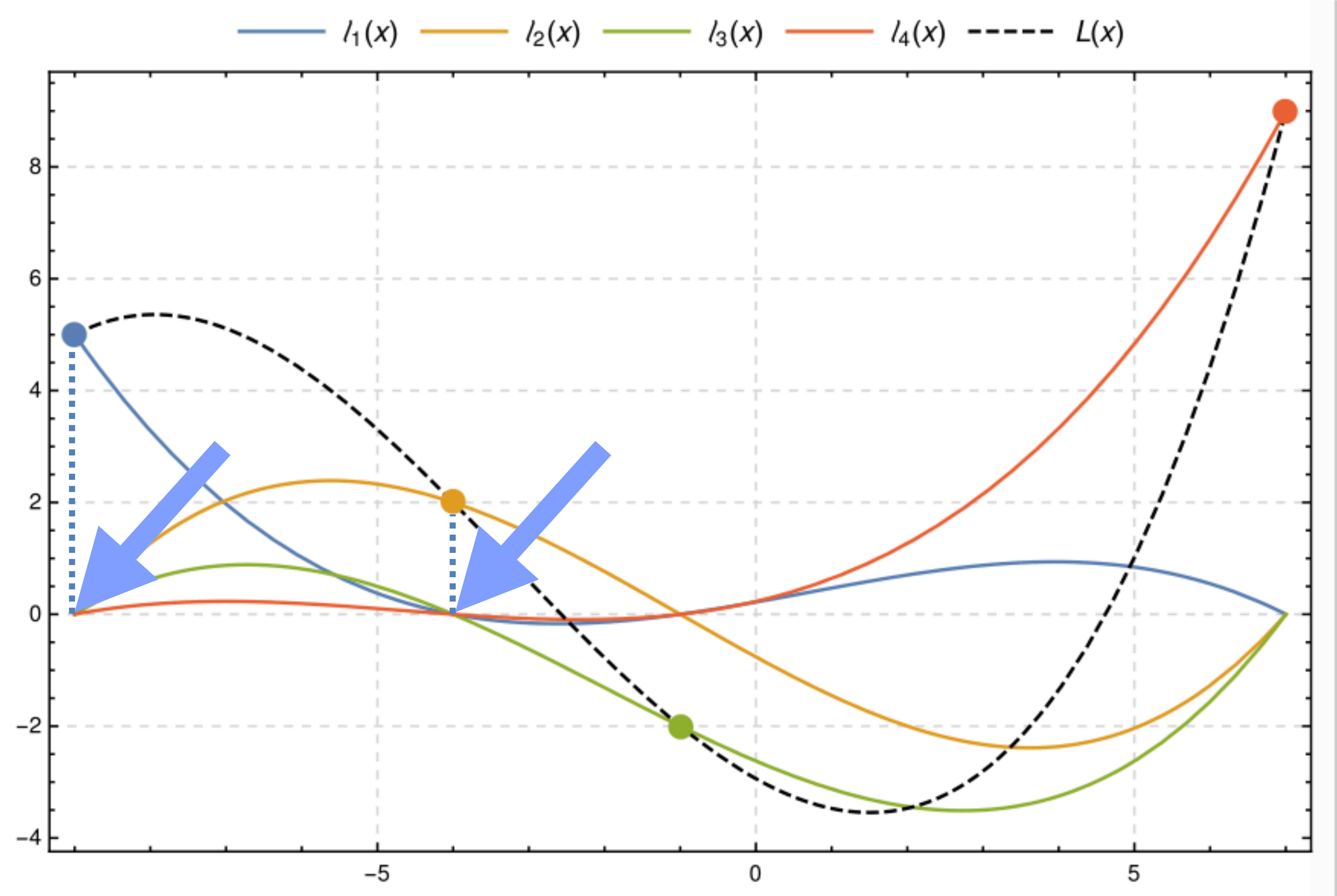
This image shows, for four points ((−9, 5), (−4, 2), (−1, −2), (7, 9)), the (cubic) interpolation polynomial $L(x)$ (dashed, black), which is the sum of the *scaled* basis polynomials $y_0\ell_0(x)$, $y_1\ell_1(x)$, $y_2\ell_2(x)$ and $y_3\ell_3(x)$. The interpolation polynomial passes through all four control points, and each *scaled* basis polynomial passes through its respective control point and is 0 where *x* corresponds to the other three control points.

Polinomio interpolado de Lagrange



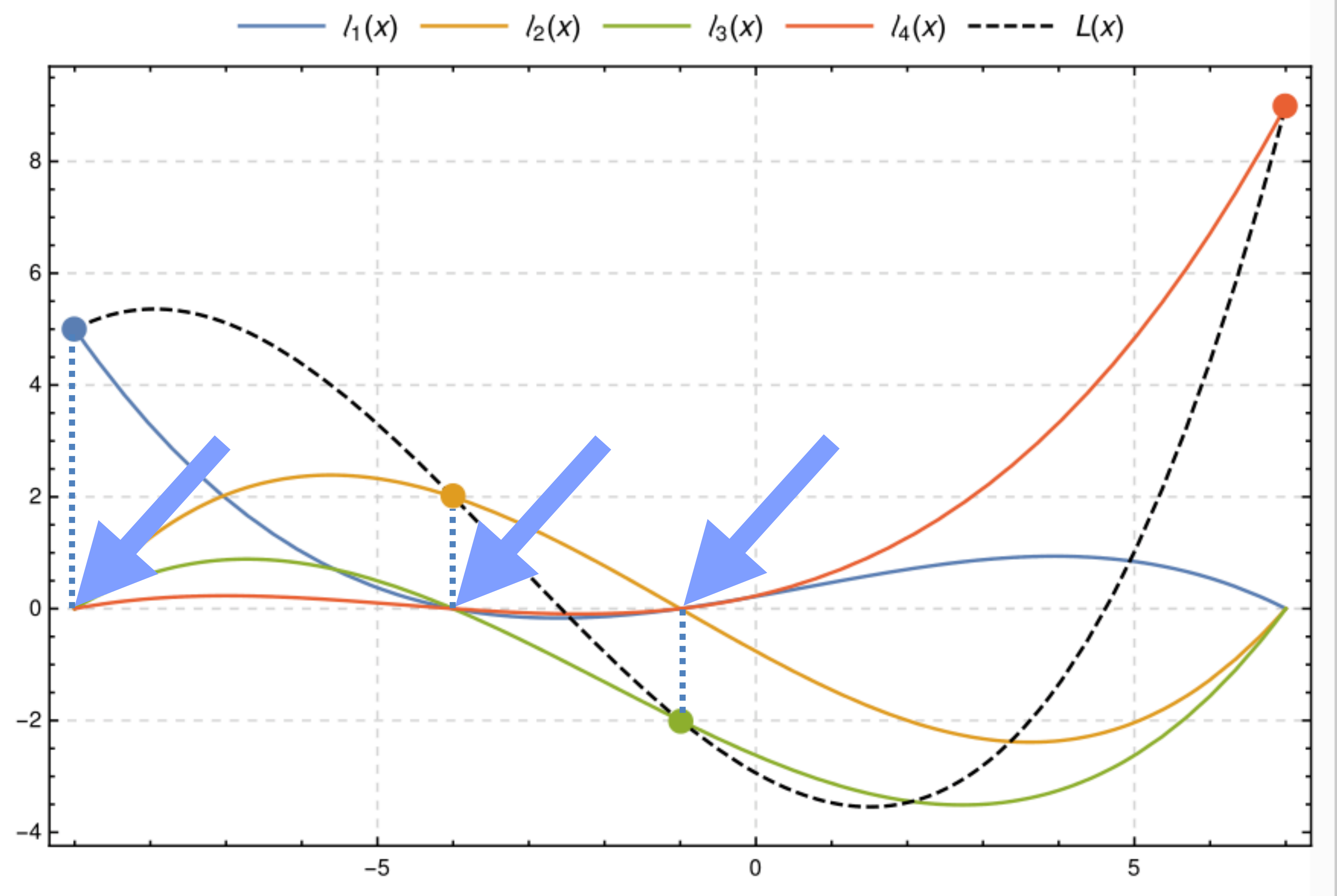
This image shows, for four points ((−9, 5), (−4, 2), (−1, −2), (7, 9)), the (cubic) interpolation polynomial $L(x)$ (dashed, black), which is the sum of the *scaled* basis polynomials $y_0\ell_0(x)$, $y_1\ell_1(x)$, $y_2\ell_2(x)$ and $y_3\ell_3(x)$. The interpolation polynomial passes through all four control points, and each *scaled* basis polynomial passes through its respective control point and is 0 where x corresponds to the other three control points.

Polinomio interpolado de Lagrange



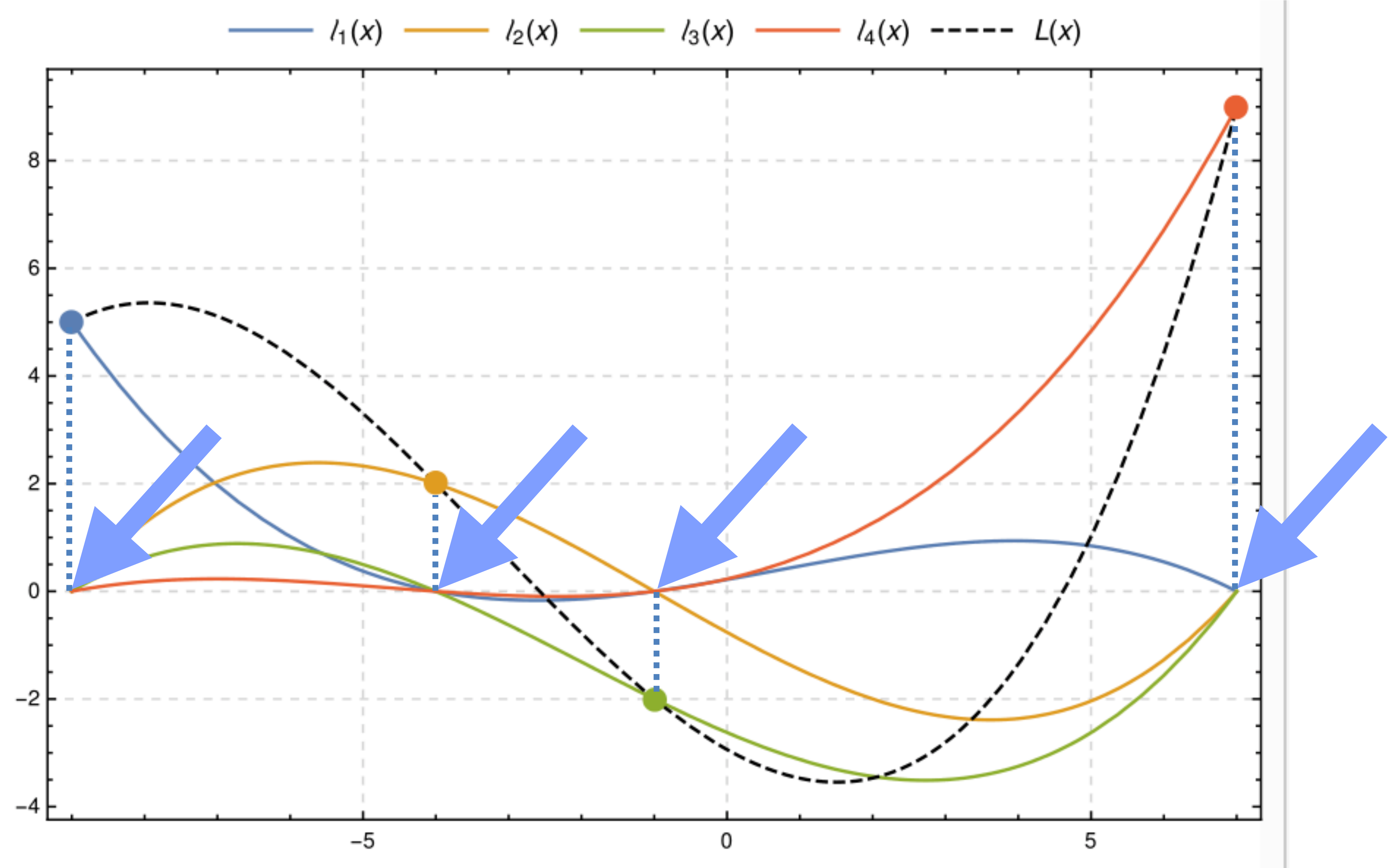
This image shows, for four points ((−9, 5), (−4, 2), (−1, −2), (7, 9)), the (cubic) interpolation polynomial $L(x)$ (dashed, black), which is the sum of the *scaled* basis polynomials $y_0\ell_0(x)$, $y_1\ell_1(x)$, $y_2\ell_2(x)$ and $y_3\ell_3(x)$. The interpolation polynomial passes through all four control points, and each *scaled* basis polynomial passes through its respective control point and is 0 where x corresponds to the other three control points.

Polinomio interpolado de Lagrange



This image shows, for four points ((−9, 5), (−4, 2), (−1, −2), (7, 9)), the (cubic) interpolation polynomial $L(x)$ (dashed, black), which is the sum of the *scaled* basis polynomials $y_0\ell_0(x)$, $y_1\ell_1(x)$, $y_2\ell_2(x)$ and $y_3\ell_3(x)$. The interpolation polynomial passes through all four control points, and each *scaled* basis polynomial passes through its respective control point and is 0 where x corresponds to the other three control points.

Polinomio interpolado de Lagrange



This image shows, for four points ((−9, 5), (−4, 2), (−1, −2), (7, 9)), the (cubic) interpolation polynomial *L*(*x*) (dashed, black), which is the sum of the *scaled* basis polynomials $y_0\ell_0(x)$, $y_1\ell_1(x)$, $y_2\ell_2(x)$ and $y_3\ell_3(x)$. The interpolation polynomial passes through all four control points, and each *scaled* basis polynomial passes through its respective control point and is 0 where *x* corresponds to the other three control points.

Polinomio interpolado de Lagrange

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0 \le m \le k \\ m \ne j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)},$$

Polinomio interpolado de Lagrange

No se anula para x_j

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0 \le m \le k \\ m \ne j}} \frac{x - x_m}{x_j - x_m} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)},$$

Polinomio interpolado de Lagrange

$$\ell_j(x) := \prod_{\substack{0\le m\le k \\ m\neq j}} \frac{x-x_m}{x_j-x_m} = \frac{(x-x_0)}{(x_j-x_0)}\cdots\frac{(x-x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})}\frac{(x-x_{j+1})}{(x_j-x_{j+1})}\cdots\frac{(x-x_k)}{(x_j-x_k)},$$

Determina el polinomio interpolador de la tabla

x	1	2	3
y	1	$1/2$	$1/3$

.

Los polinomios componentes son

*		
$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$

$$\Rightarrow \quad l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)\,.$$

	*	
$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$

$$\Rightarrow \quad l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)\,.$$

		*
$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$

$$\Rightarrow \quad l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\,.$$

El polinomio interpolador es

$$P_2(x) = l_0(x)\cdot 1 + l_1(x)\cdot\frac{1}{2} + l_2(x)\frac{1}{3}.$$

Polinomio interpolado de Lagrange

El polinomio interpolador es

$$P_2(x) = l_0(x) \cdot 1 + l_1(x) \cdot \frac{1}{2} + l_2(x)\frac{1}{3}.$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}(x-1)(x-3) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2). \qquad (6)$$

La tabla de valores es la misma que la del Ejemplo 6.1, si operamos en (6), resulta

$$P_2(x) = \frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6},$$

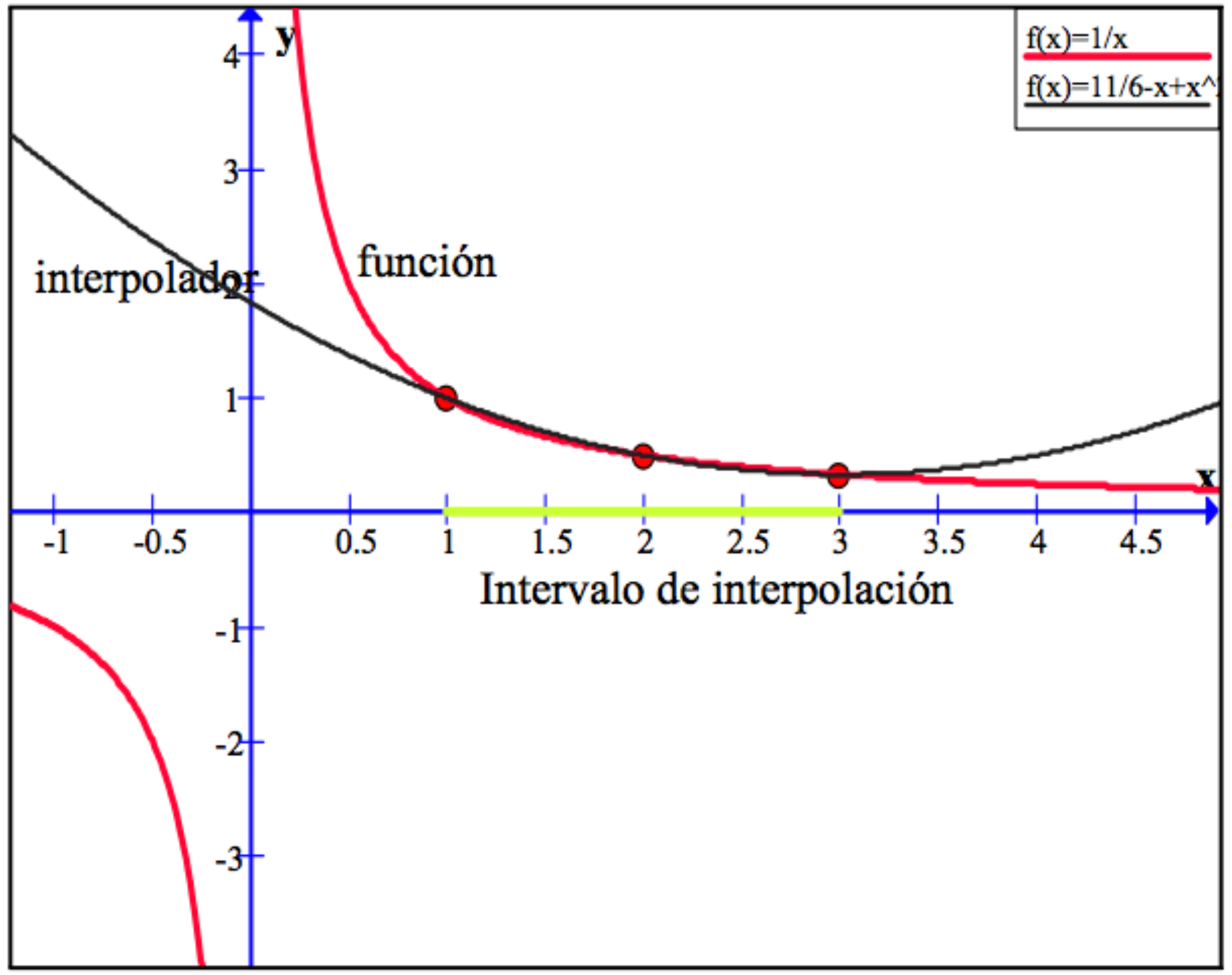
Polinomio interpolado de Lagrange

El siguiente gráfico muestra la representación conjunta de la función

$$f(x) = 1/x$$

y el polinomio interpolador calculado en el Ejemplo 6.1

$$P_2(x) = \frac{11}{6} - x + \frac{x^2}{6}.$$



x	1	2	3
y	1	1/2	1/3

La tabla del problema anterior la generamos a partir de la función f(x) = 1/x

Polinomio interpolado de Lagrange

- Desventajas:
  - El grado del polinomio crece con el numero de puntos a interpolar
  - A medida que crece el grado, mayores oscilaciones entre puntos consecutivos. En tal caso, mejor Hermite or splines

MATLAB demo

Interpolación Catmull-Rom

Catmull-Rom.

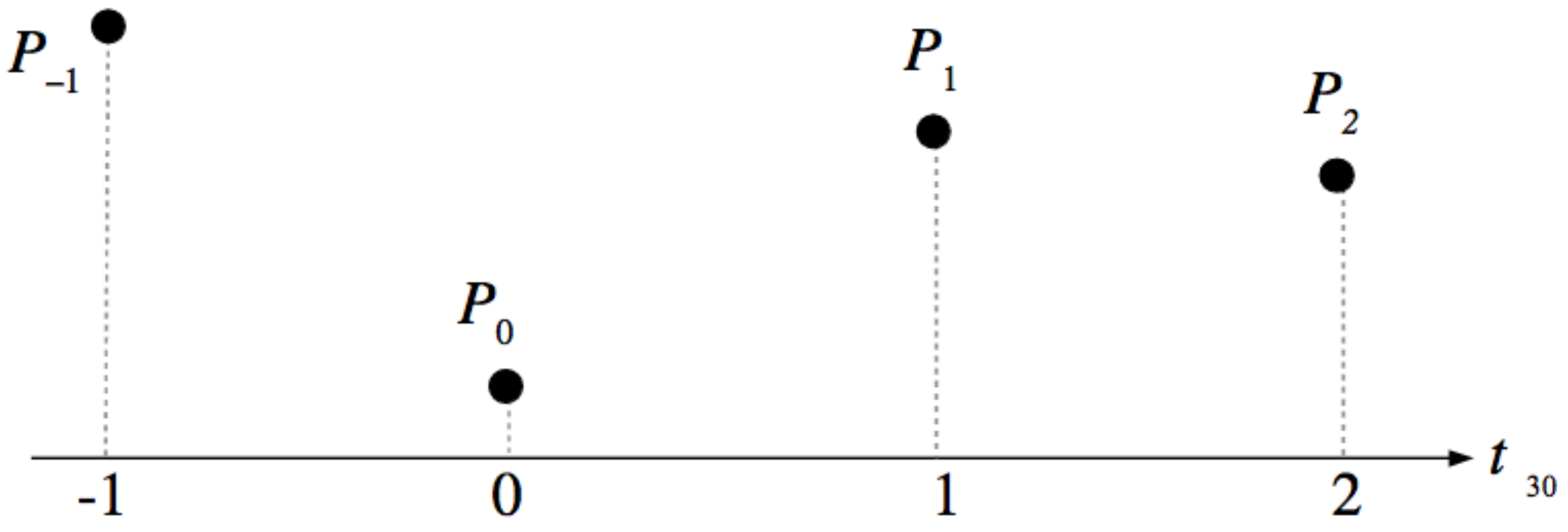
- Caso particular de Hermite.
- Tangentes desconocida.
- La tangente en cada punto $\mathbf{p_i}$ se calcula utilizando el punto anterior y el siguiente en la spline, $\mathbf{p_{i-1}}$ y $\mathbf{p_{i+1}}$.

Interpolación Catmull-Rom

Catmull-Rom.

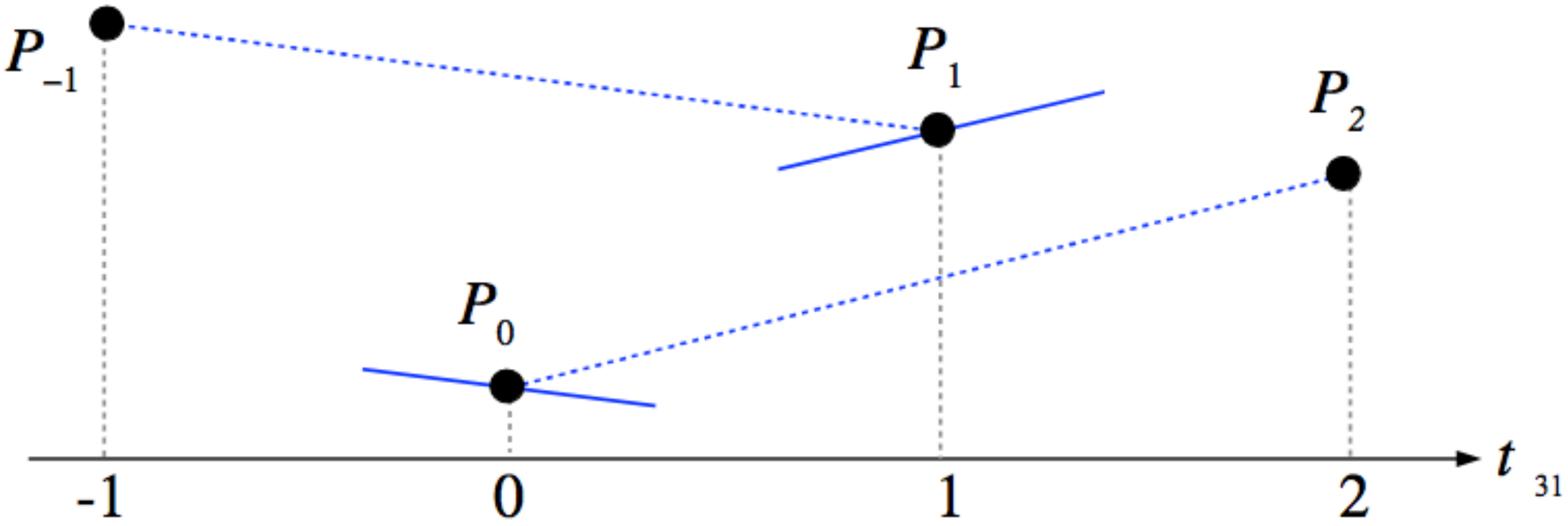
- Caso particular de Hermite.
- Tangentes desconocida.
- La tangente en cada punto $\mathbf{p_i}$ se calcula utilizando el punto anterior y el siguiente en la spline, $\mathbf{p_{i-1}}$ y $\mathbf{p_{i+1}}$.

- **Intuition:** A plausible tangent at each point can be inferred directly from the data
  - Now use Hermite interpolation



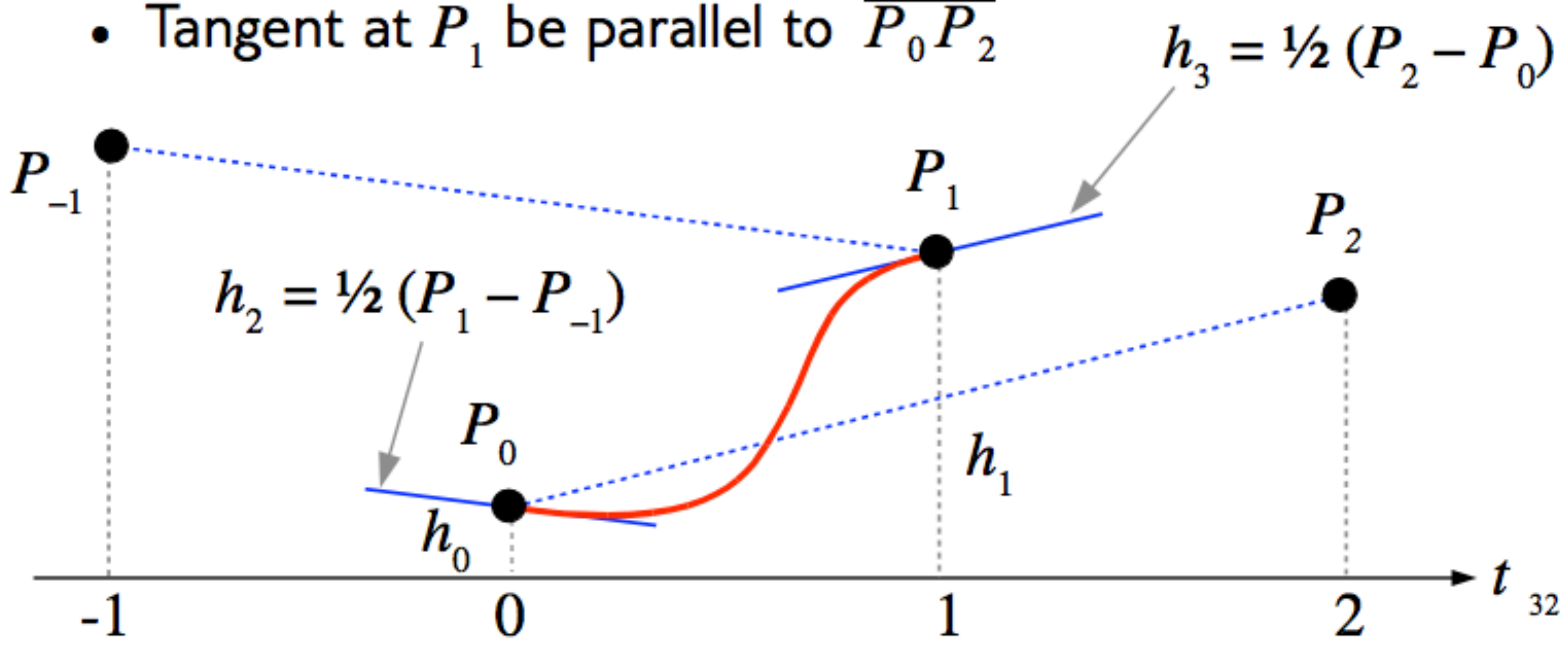
Catmull-Rom Interpolation

- For each segment (P_0, P_1), use neighboring control points P_{-1}, P_2 and require that:
  - Tangent at P_0 be parallel to $\overline{P_{-1}P_1}$
  - Tangent at P_1 be parallel to $\overline{P_0P_2}$



Catmull-Rom Interpolation

- For each segment (P_0, P_1), use neighboring control points P_{-1}, P_2 and require that:
  - Tangent at P_0 be parallel to $\overline{P_{-1}P_1}$
  - Tangent at P_1 be parallel to $\overline{P_0P_2}$



Catmull-Rom Interpolation

- In terms of Hermite constraints:

$$
\begin{aligned}
h_0 &= P_0 \\
h_1 &= P_1 \\
h_2 &= ½\,(P_1 - P_{-1}) \\
h_3 &= ½\,(P_2 - P_0)
\end{aligned}
$$

Interpolación Catmull-Rom

Muy utilizadas interpolación suave entre keyframes.

Por ejemplo, **trayectorias de la cámara** generadas a partir de los keyframes.

Son populares principalmente por ser relativamente fáciles de calcular, principalmente las tangentes en puntos internos, garantizando que cada posición de keyframes se obtiene exactamente, y también garantizando que las tangentes de la curva generada son continuas sobre varios segmentos.

Interpolación Splines

- Un **spline** es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios.

- Requiere solo polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones, indeseables en la mayoría de las aplicaciones.

Interpolación Splines

Splines. Ejemplo 1. ***Interpolar con splines f(x) = 1 / x , en los puntos en los que x vale 1, 2 y 4***

$f(1) = 1$; $f(2) = 0.5$; $f(4) = 0.25$

El primer segmento: (1,1) —> (2, 0.5)

Ecuación lineal: $P1(x) = ax + b$

(1) $1 = a+b$
(2) $0.5 = 2a+b$

De (1) se obtiene: $a=1-b$ (3)

Reemplazando (3) en (2) se obtiene: $0.5=2(1-b)+b$

luego —> $b=1.5$

Interpolación

Splines. Ejemplo 1.

Reemplazando el valor de (b) en (1), se obtiene:
$a = -0.5$

Se concluye que: $P1(x) = -0.5x + 1.5$

El segundo segmento: $(2,0.5) \longrightarrow (4, 0.25)$
$P2(x) = ax + b$

Análogamente a lo hecho para P1(x), en el caso de P2(x) se obtiene:
(1) $0.5 = 2a + b$
(2) $0.25 = 4a + b$

$a = -0.125,\ b = 0.75$
$P2(x) = -0.125x + 0.75$

MATLAB demo

Interpolación

Splines. Ejemplo 2. *Interpolar con splines de grado 2*

f(3) = 2.5; f(4.5) = 1; f(7) = 2.5; f(9)=0.5

Primero que nada, vemos que se forman tres intervalos: [3,4.5],[4.5,7],[7,9]
En cada uno de estos intervalos, debemos definir una función polinomial de grado 2, como sigue:

Hacemos que la spline pase por los puntos de la tabla de datos, es decir, se debe cumplir que:

s(3)=2.5 s(4.5)=1 s(7)=2.5 s(9)=0.5

Así, se forman las siguientes ecuaciones

$$s(3) = 2.5 \Rightarrow 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5$$

$$s(4.5) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (4.5)^2 a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \\ (4.5)^2 a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$s(7) = 2.5 \Rightarrow \begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \end{cases}$$

$$s(9) = 0.5 \Rightarrow 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5$$

Interpolación

Splines. Ejemplo 2.

Hasta aquí, tenemos un total de 6 ecuaciones con 9 incógnitas.
El siguiente paso es manejar la existencia de las derivadas continuas.
En el caso de las splines de grado 2, necesitamos que la spline tenga derivada continua de orden k-1=1, es decir, primera derivada continua.

Calculamos primero la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1 & si \quad x \in [3, 4.5] \\ 2a_2x + b_2 & si \quad x \in [4.5, 7] \\ 2a_3x + b_3 & si \quad x \in [7, 9] \end{cases}$$

Vemos que esta derivada está formada por segmentos de rectas, que pudieran presentar discontinuidad en los cambios de intervalo. Es decir, las posibles discontinuidades son x = 4.5 y x = 7 .

Interpolación

Splines. Ejemplo 2.

Por lo tanto para que s′(x) sea continua, se debe cumplir que:

$$2a_1(4.5)+b_1=2a_2(4.5)+b_2 \Rightarrow 9a_1+b_1=9a_2+b_2$$

También debe cumplirse que:

$$2a_2(7)+b_2=2a_3(7)+b_3 \Rightarrow 14a_2+b_2=14a_3+b_3$$

Así, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 9 incógnitas; esto nos da un grado de libertad para elegir alguna de las incógnitas. Elegimos por simple conveniencia a1 = 0.

De esta forma, tenemos un total de 8 ecuaciones con 8 incógnitas:

$$\begin{array}{ll} 3b_1+c_1=2.5 & 49a_3+7b_3+c_3=2.5 \\ 4.5b_1+c_1=1 & 81a_3+9b_3+c_3=0.5 \\ 20.25a_2+4.5b_2+c_2=1 & b_1=9a_2+b_2 \\ 49a_2+7b_2+c_2=2.5 & 14a_2+b_2=14a_3+b_3 \end{array}$$

Y las soluciones serían:

$$\begin{array}{lll} & a_2=0.64 & a_3=-1.6 \\ b_1=-1 & b_2=-6.76 & b_3=24.6 \\ c_1=5.5 & c_2=18.46 & c_3=-91.3 \end{array}$$

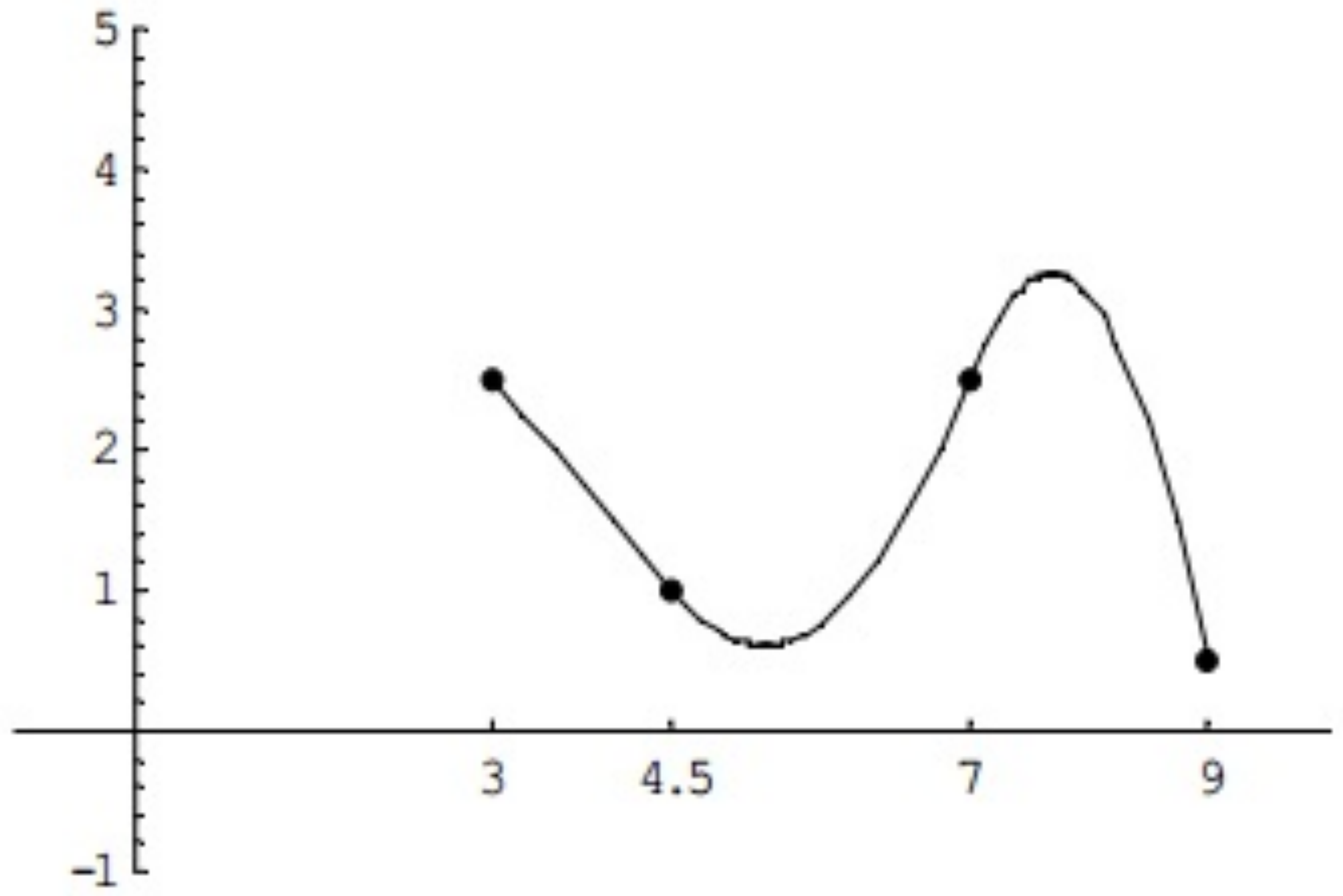
Interpolación

Splines. Ejemplo 2.

Sustituyendo los valores, obtenemos los splines:

$$s(x)=\begin{cases} -x+5.5 & si \quad x\in[3,4.5] \\ 0.64x^2-6.76x+18.46 & si \quad x\in[4.5,7] \\ -1.6x^2+24.6x-91.3 & si \quad x\in[7,9] \end{cases}$$

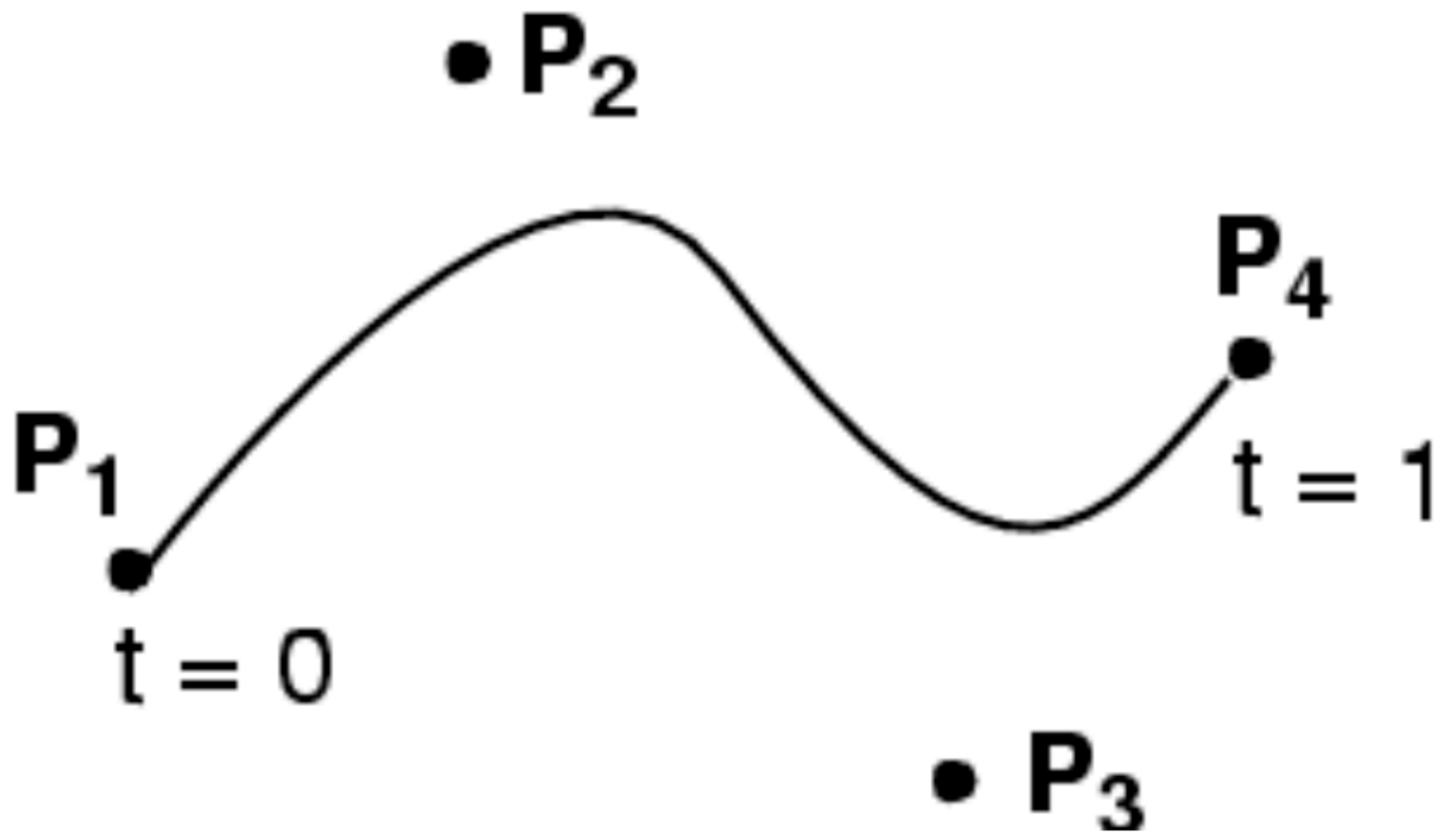
Cuya representación gráfica ser



MATLAB demo

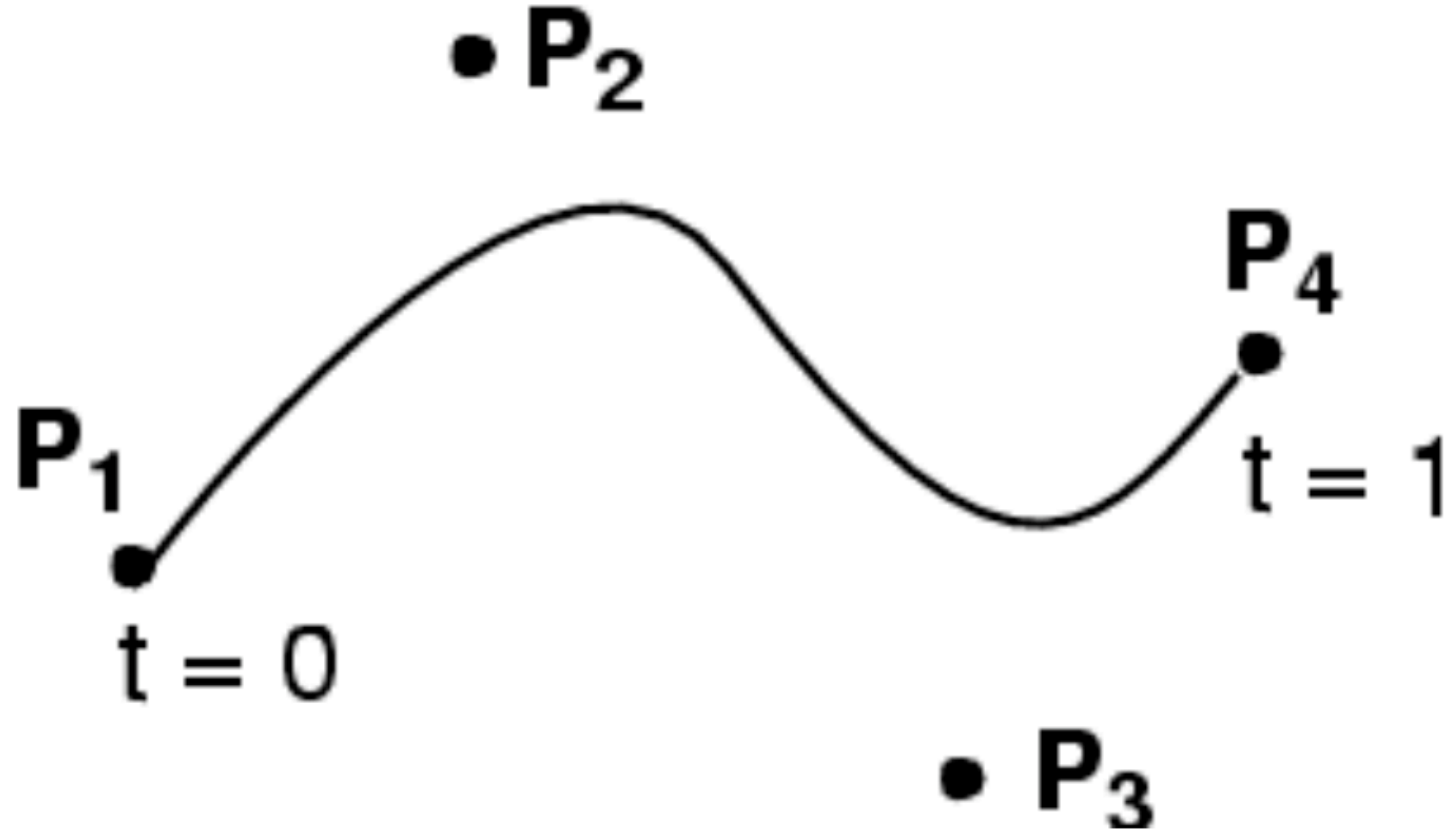
Curvas de Bezier

- User specifies 4 control points **P**1 ... **P**4
- Curve goes through (interpolates) the ends **P**1, **P**4
- Approximates the two other ones



Curvas de Bezier

- $P(t) = (1-t)^3 \quad \mathbf{P1}$
  $+ \quad 3t(1-t)^2 \quad \mathbf{P2}$
  $+ \quad 3t^2(1-t) \quad \mathbf{P3}$
  $+ \quad t^3 \quad \mathbf{P4}$



Bezier cúbica

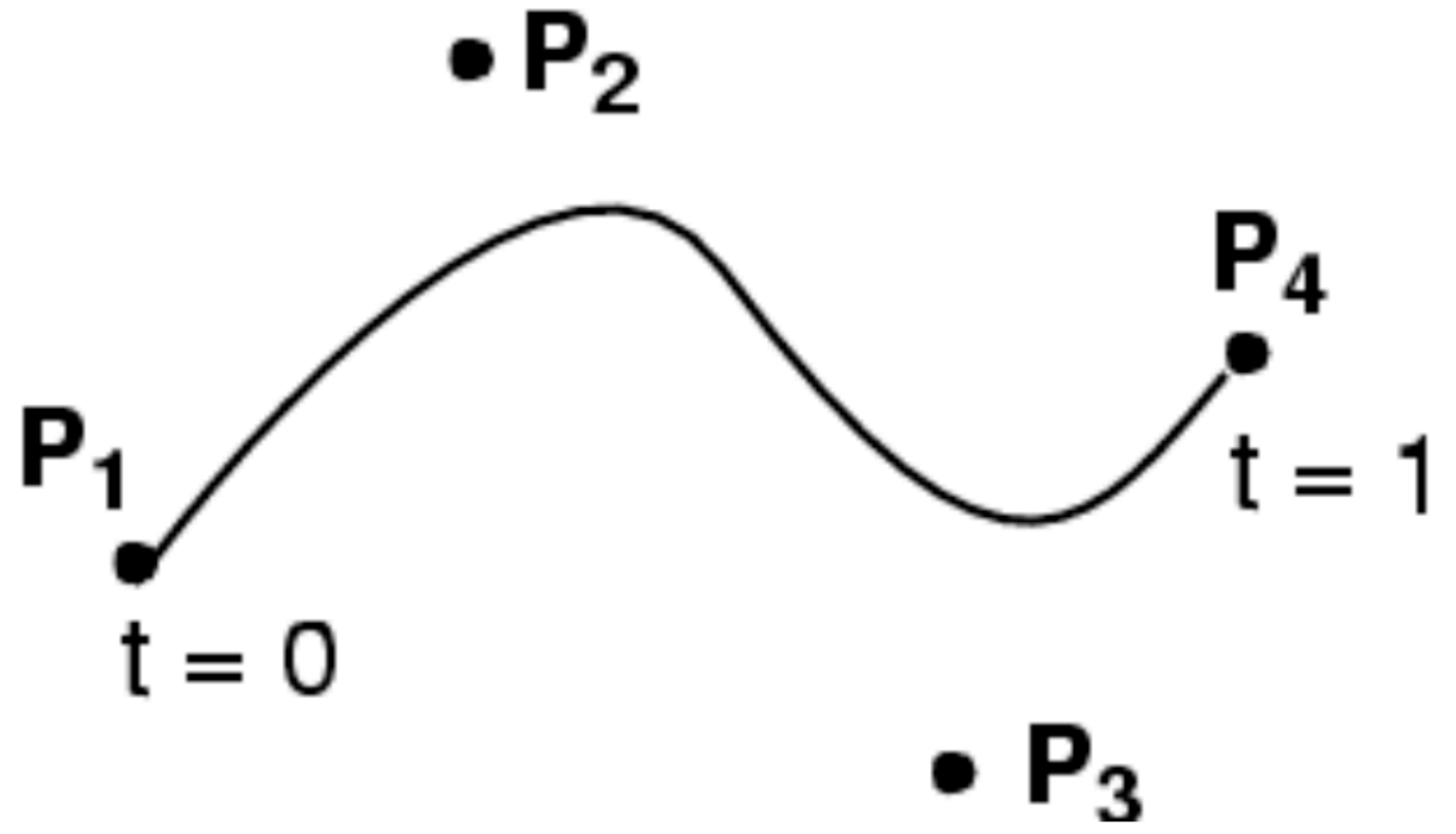
That is,

$$
\begin{aligned}
x(t) = (1-t)^3 &\; x_1 + \\
3t(1-t)^2 &\; x_2 + \\
3t^2(1-t) &\; x_3 + \\
t^3 &\; x_4 \\
y(t) = (1-t)^3 &\; y_1 + \\
3t(1-t)^2 &\; y_2 + \\
3t^2(1-t) &\; y_3 + \\
t^3 &\; y_4
\end{aligned}
$$

Curvas de Bezier

- $P(t) = (1-t)^3 \quad \mathbf{P1}$
  $+ \quad 3t(1-t)^2 \quad \mathbf{P2}$
  $+ \quad 3t^2(1-t) \quad \mathbf{P3}$
  $+ \quad t^3 \quad \mathbf{P4}$

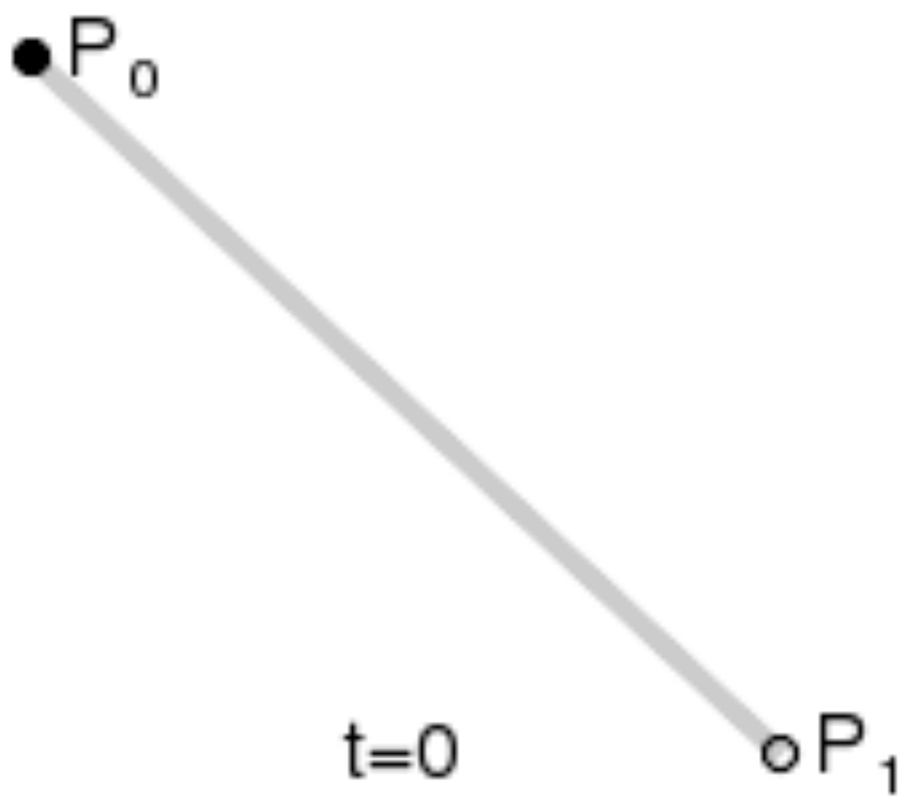
Verify what happens for t=0 and t=1



Curvas de Bezier

Lineales

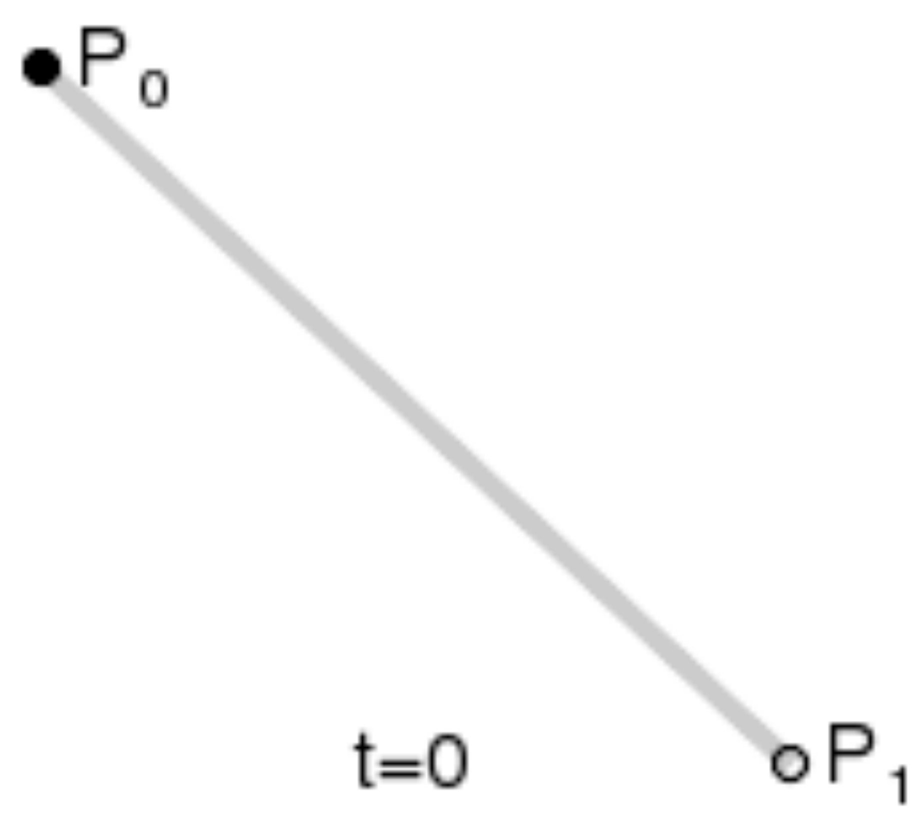
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$$



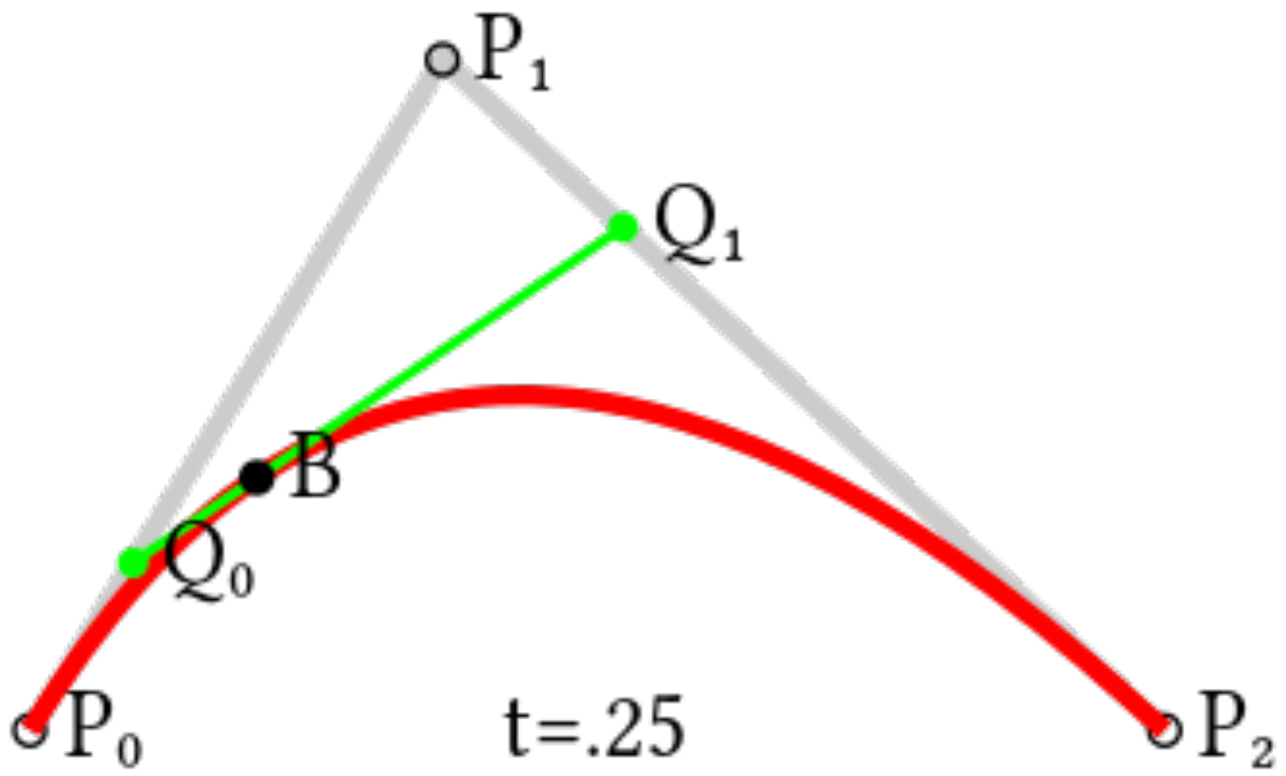
Curvas de Bezier

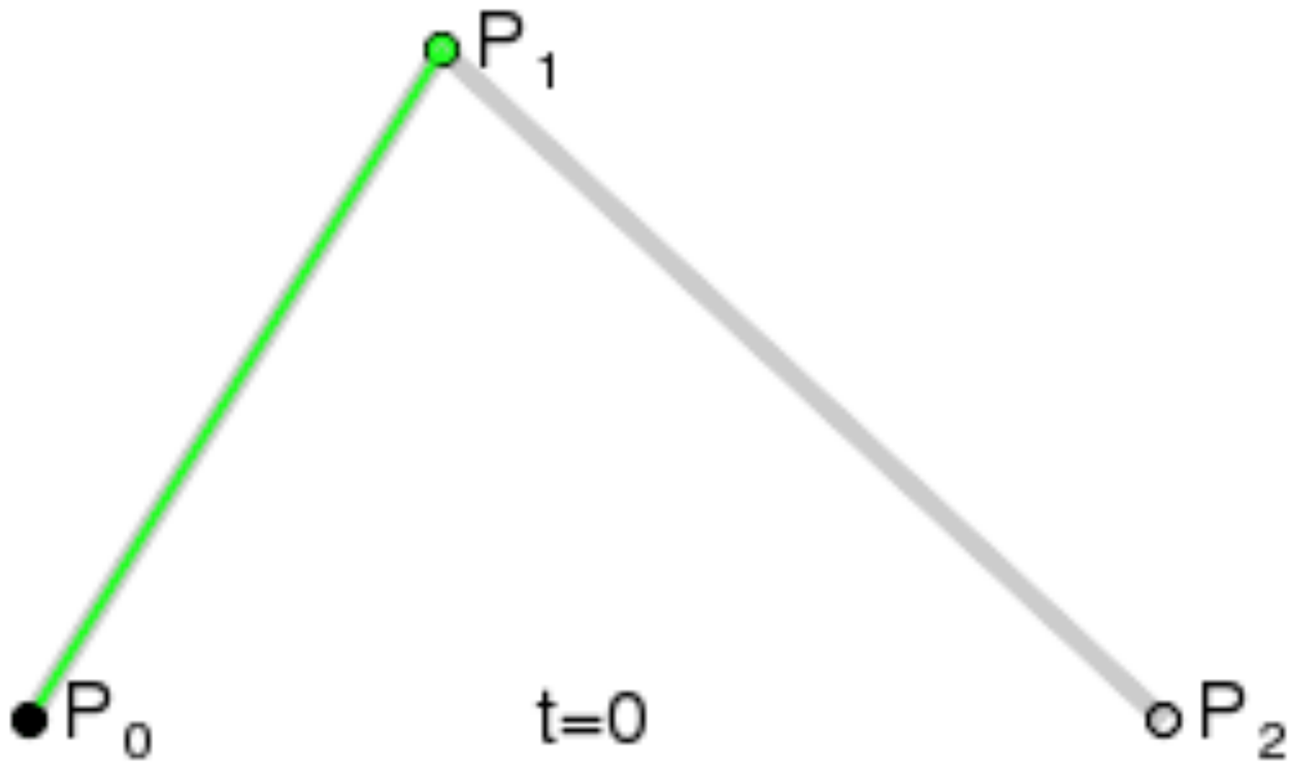
Lineales

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$$



Curvas de Bezier

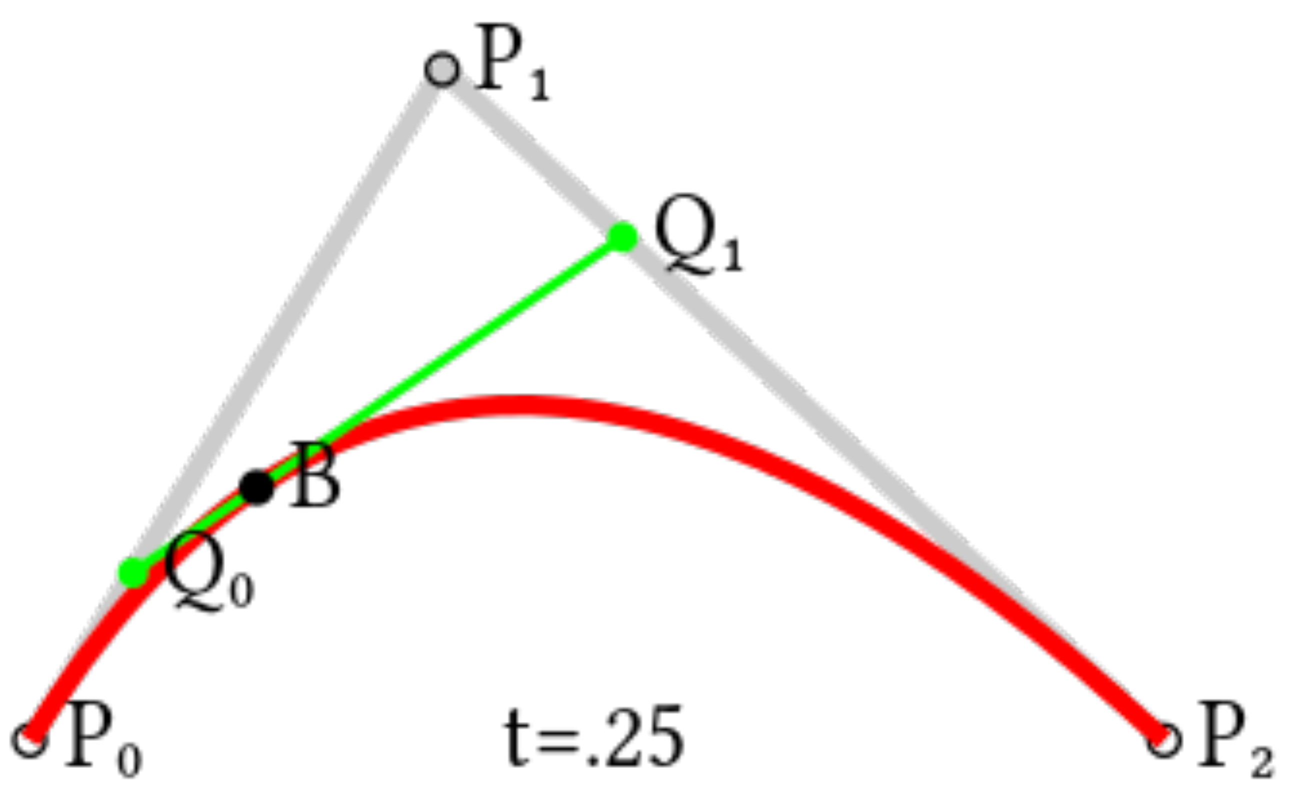


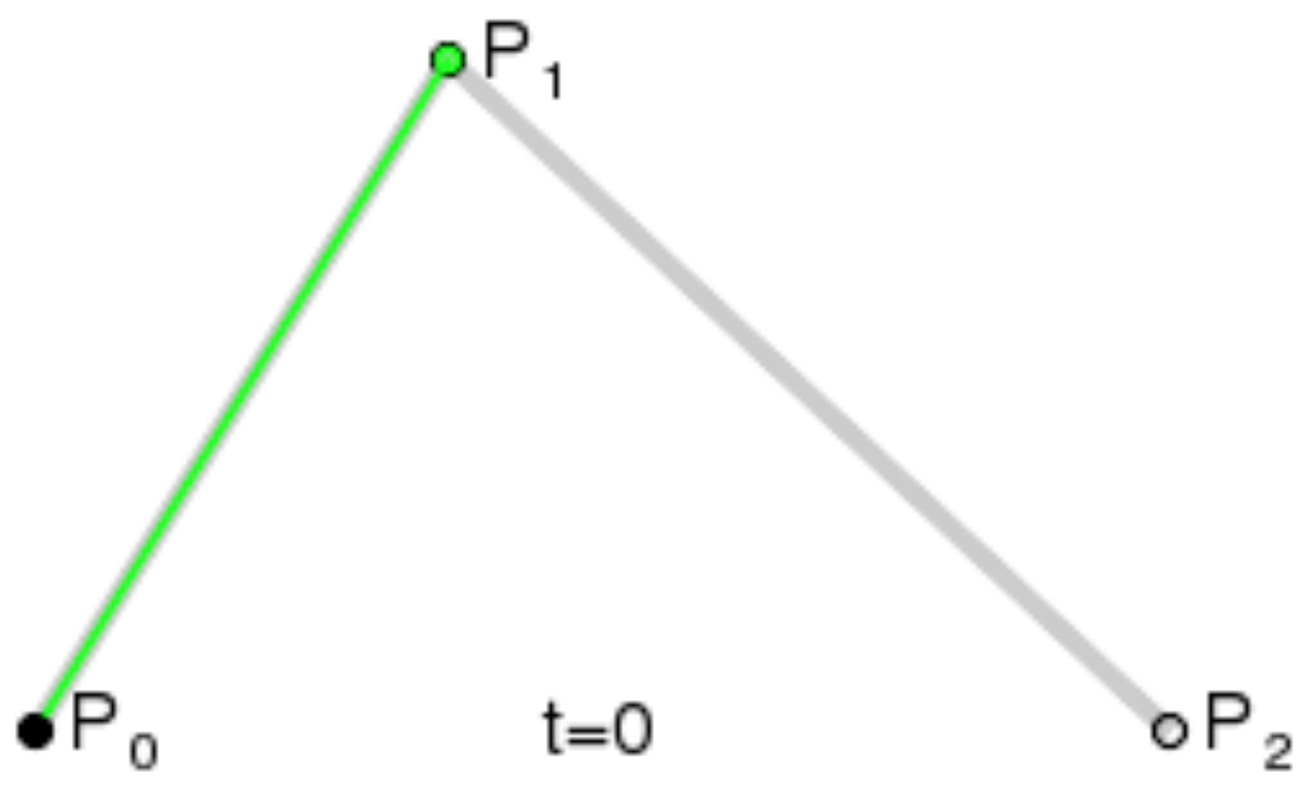


Cuadrática

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2$$

Curvas de Bezier

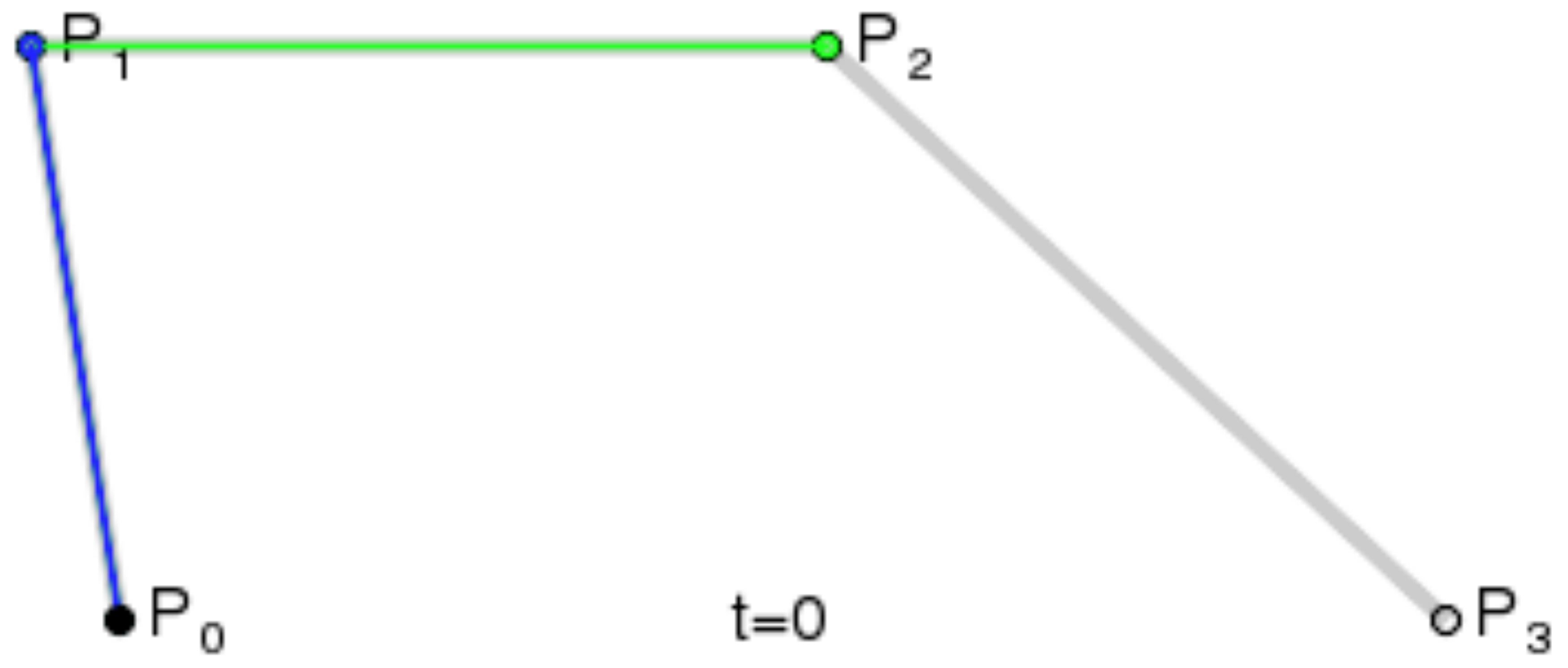




Cuadrática

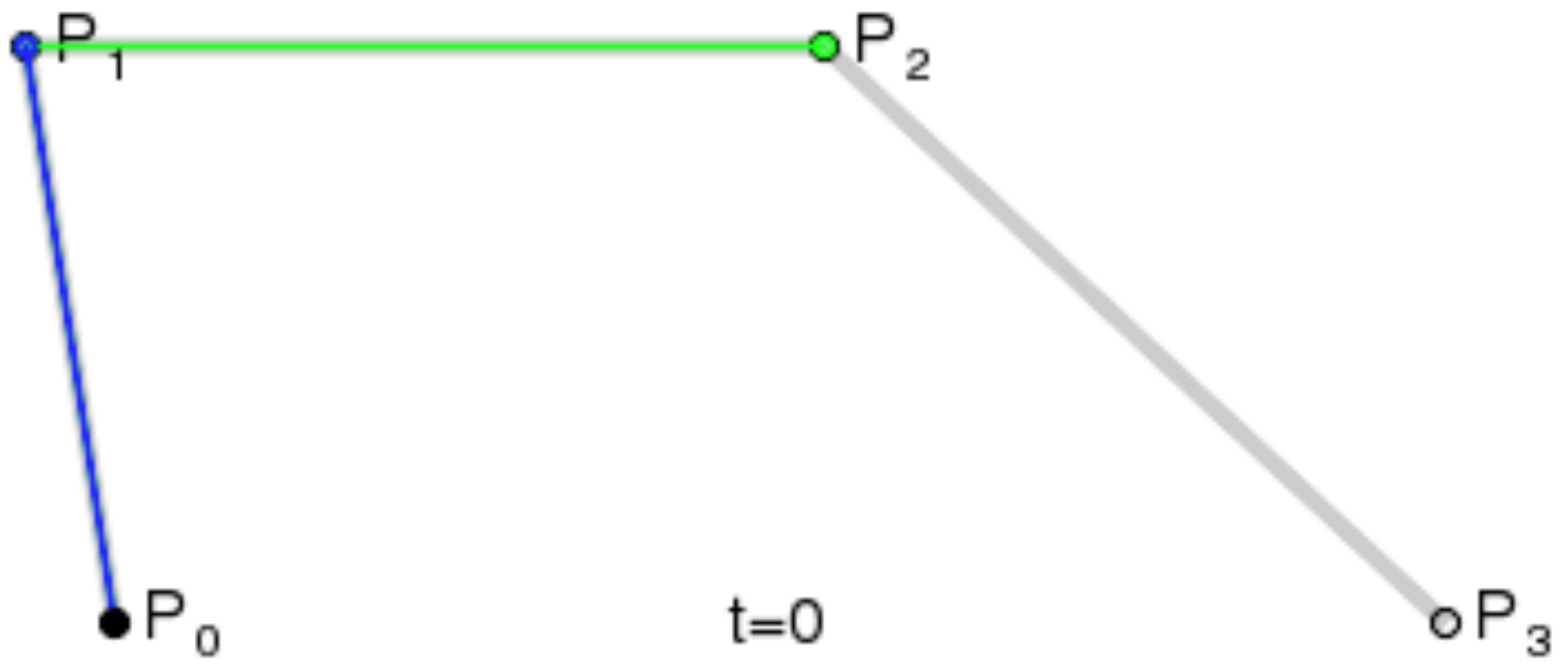
$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1-t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2$$

Curvas de Bezier



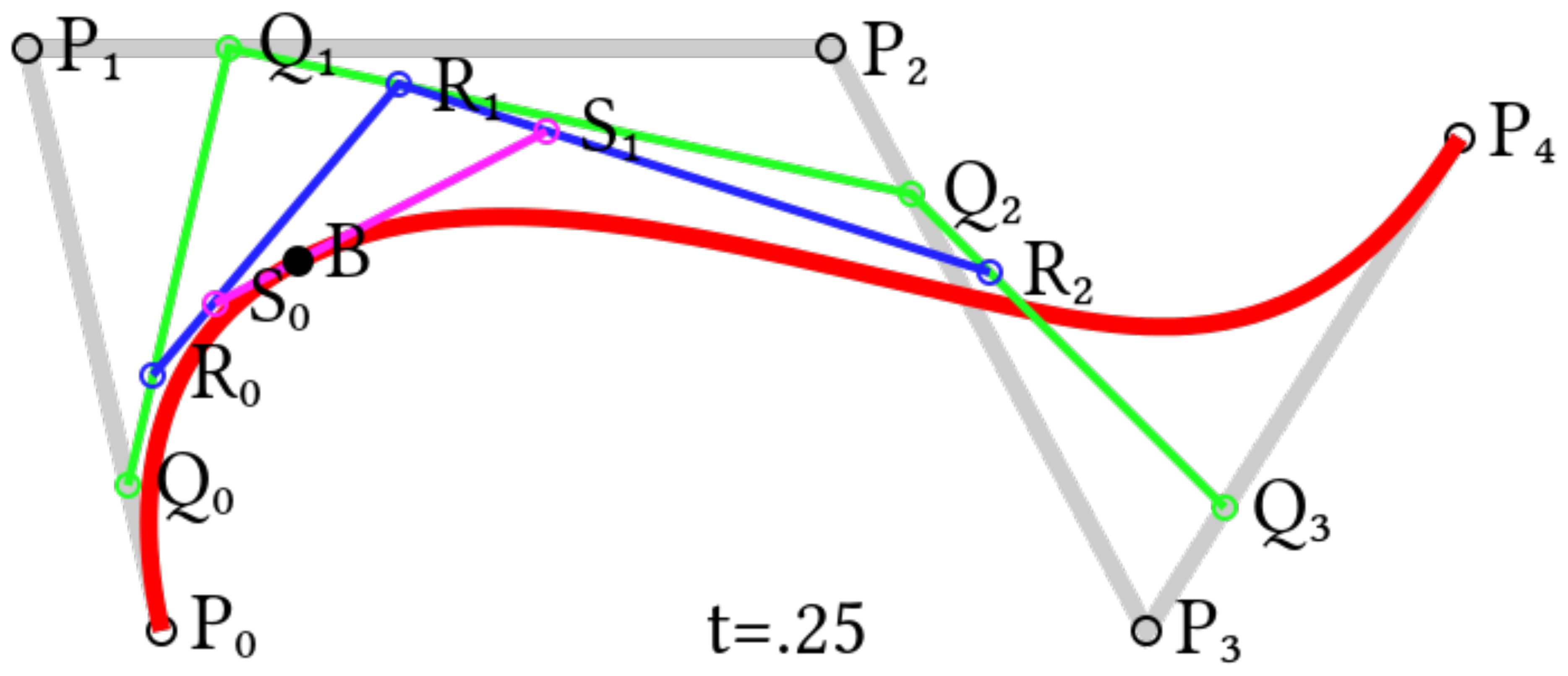
Cúbica $$\mathbf{P}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$$

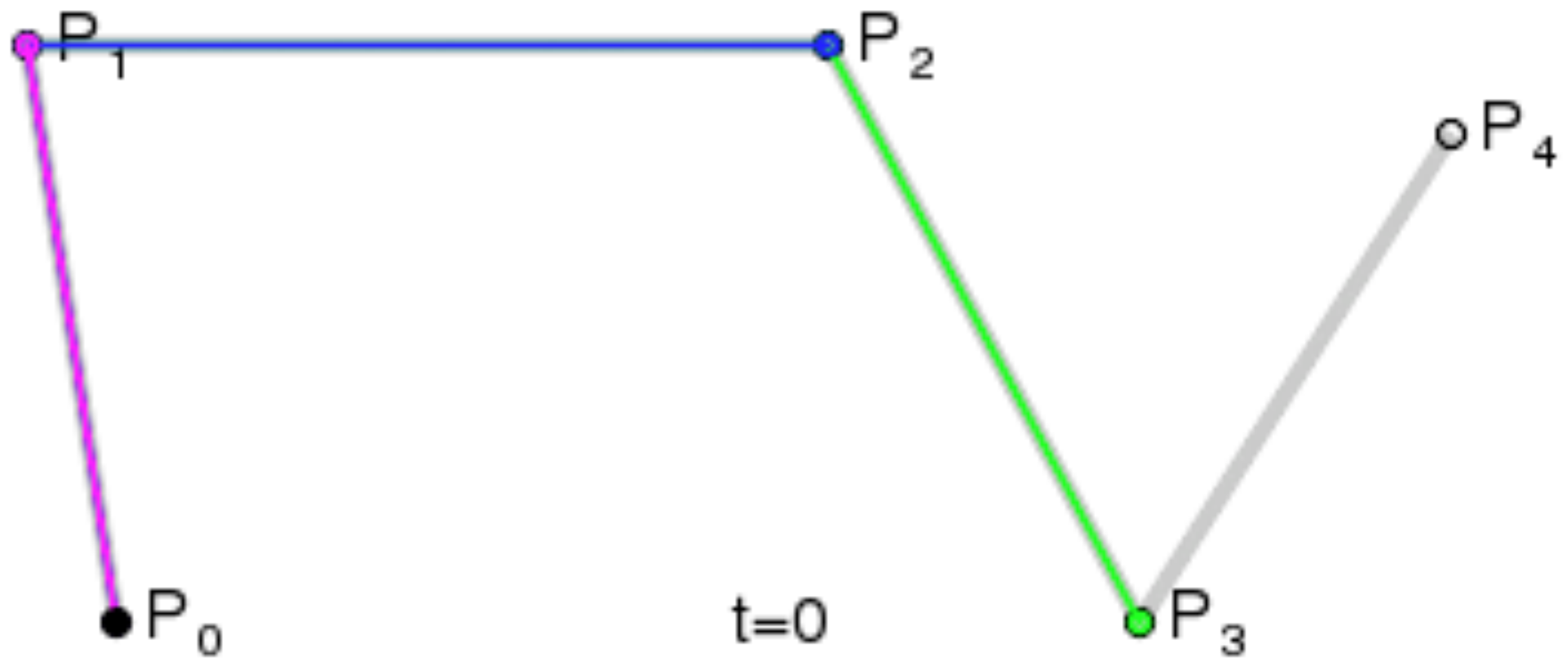
Curvas de Bezier



Cúbica $\mathbf{P}(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3$

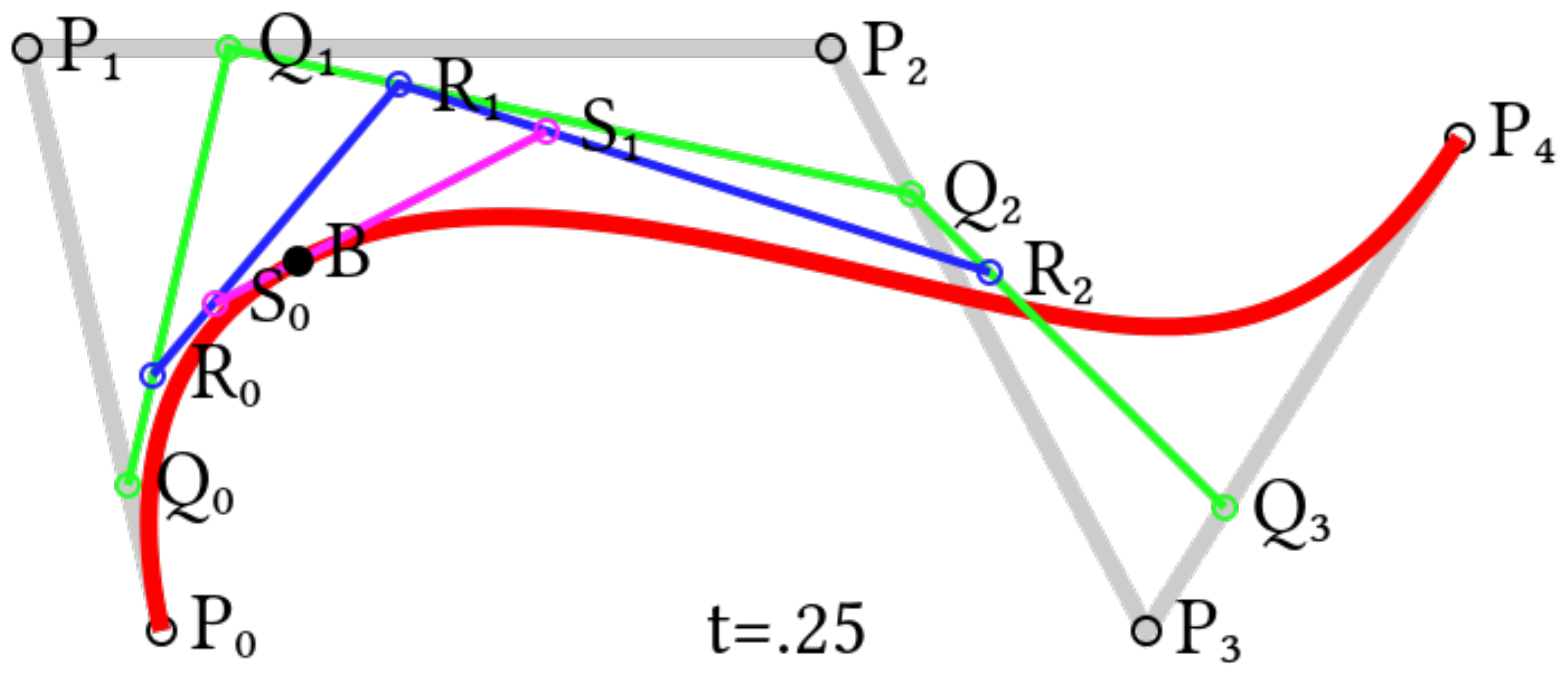
Curvas de Bezier

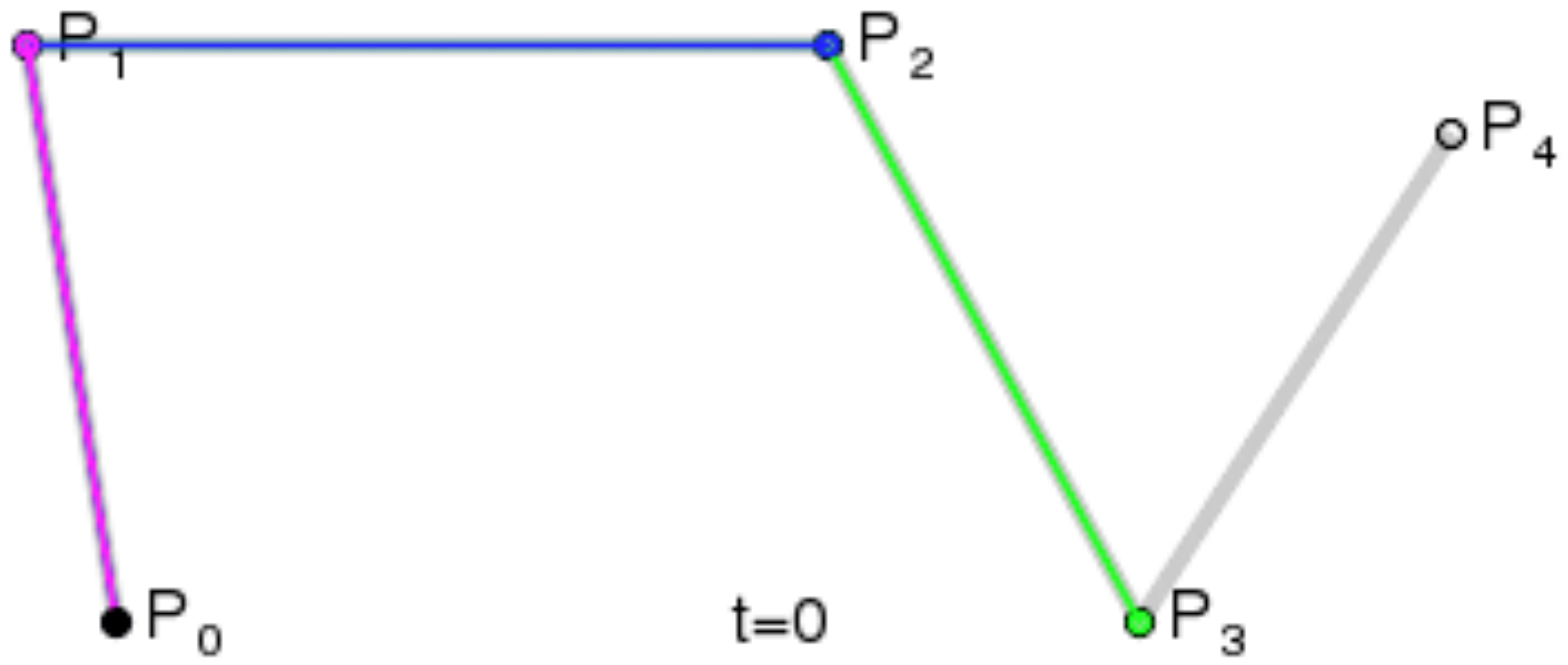




Bezier de grado 4

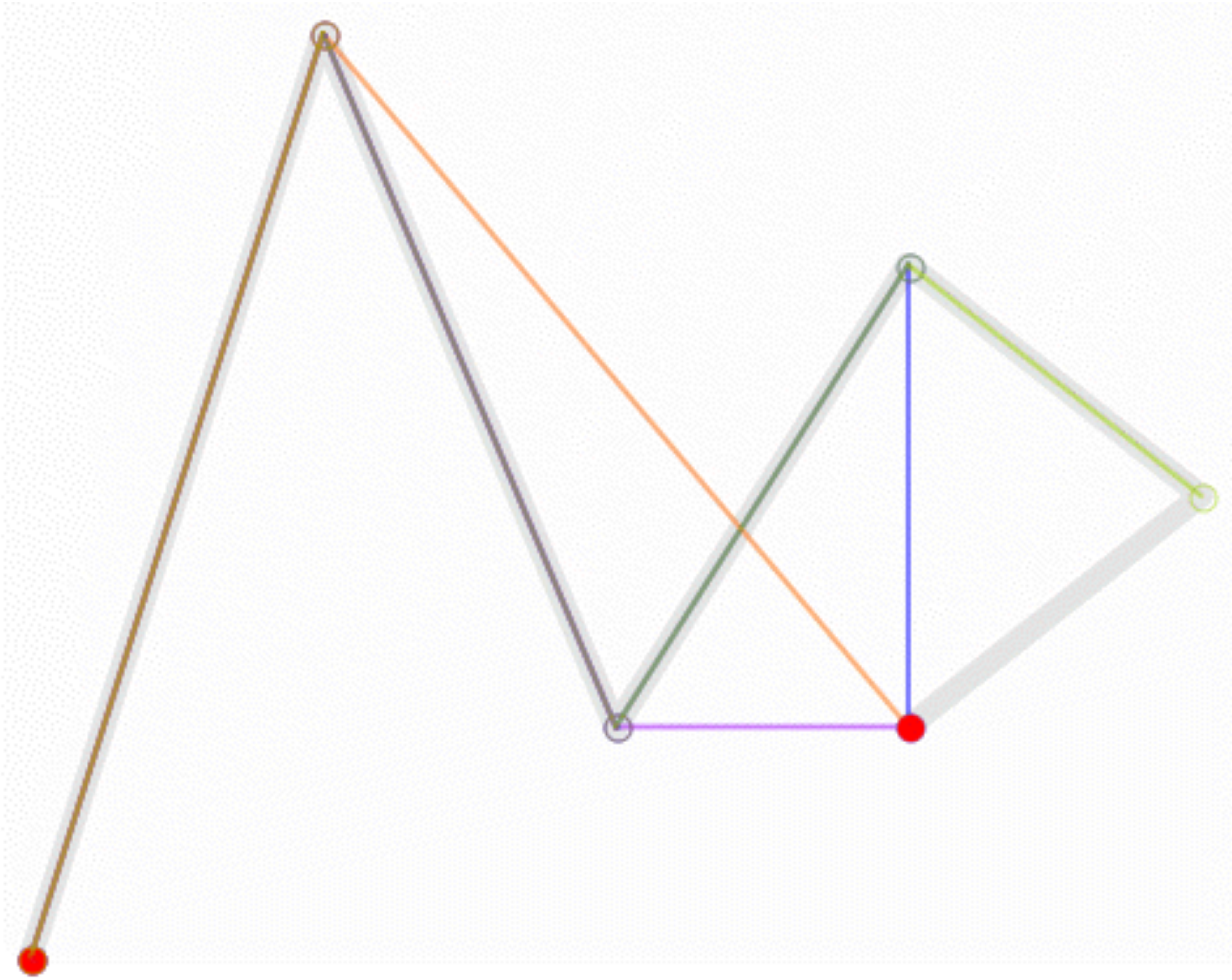
Curvas de Bezier



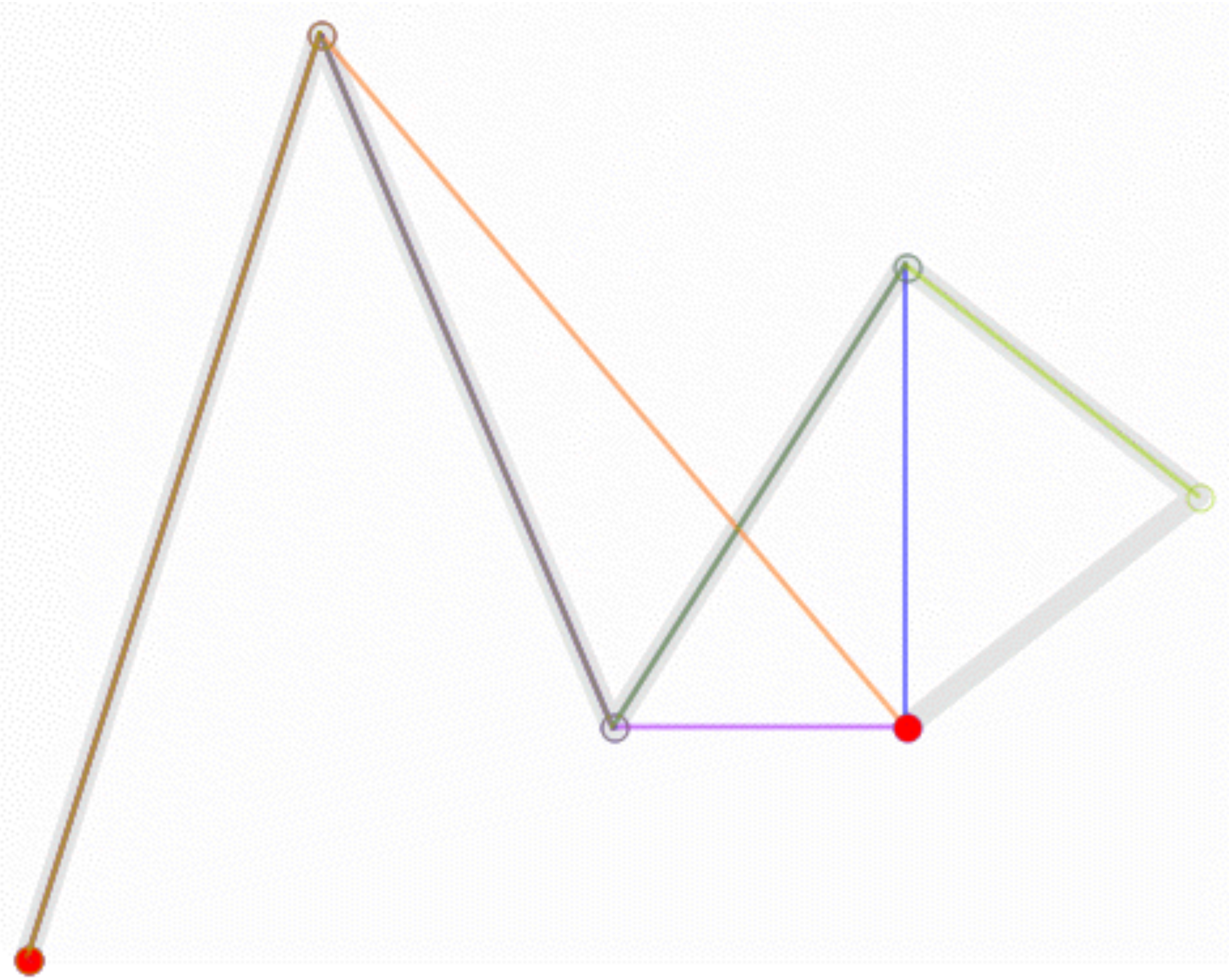


Bezier de grado 4

Curvas de Bezier

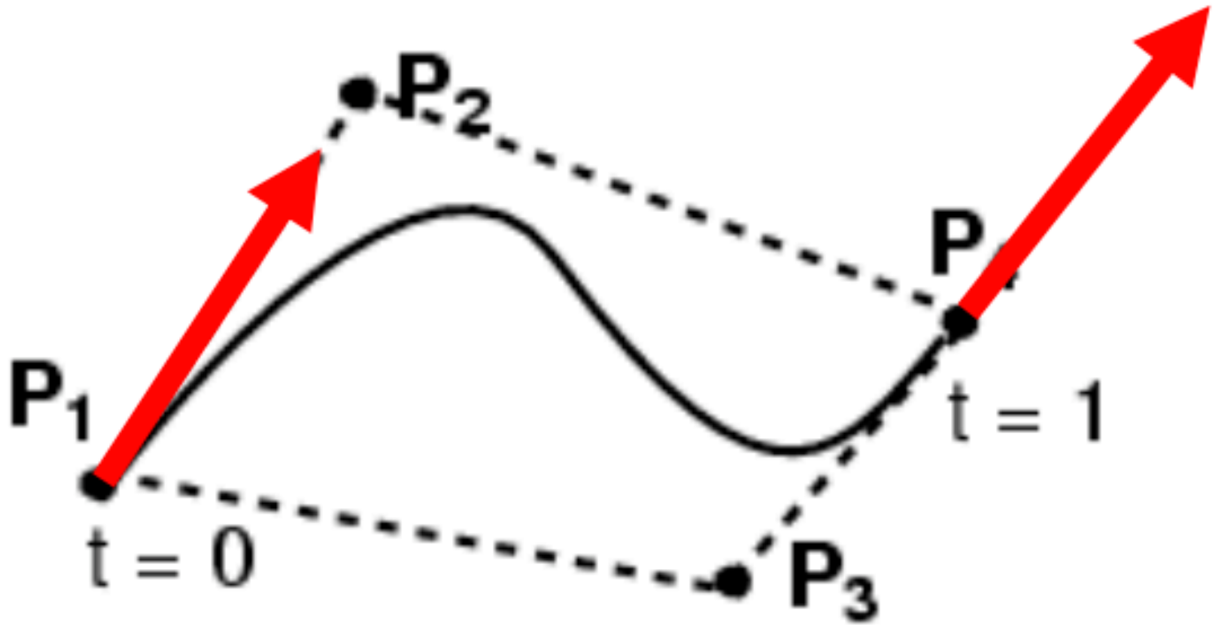


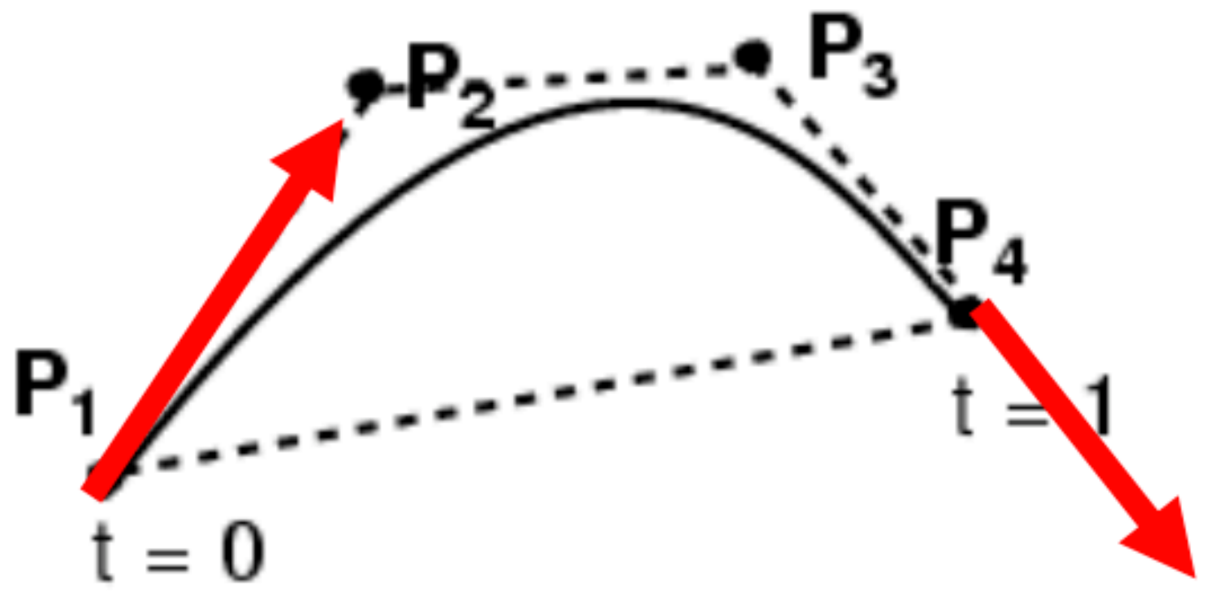
Curvas de Bezier

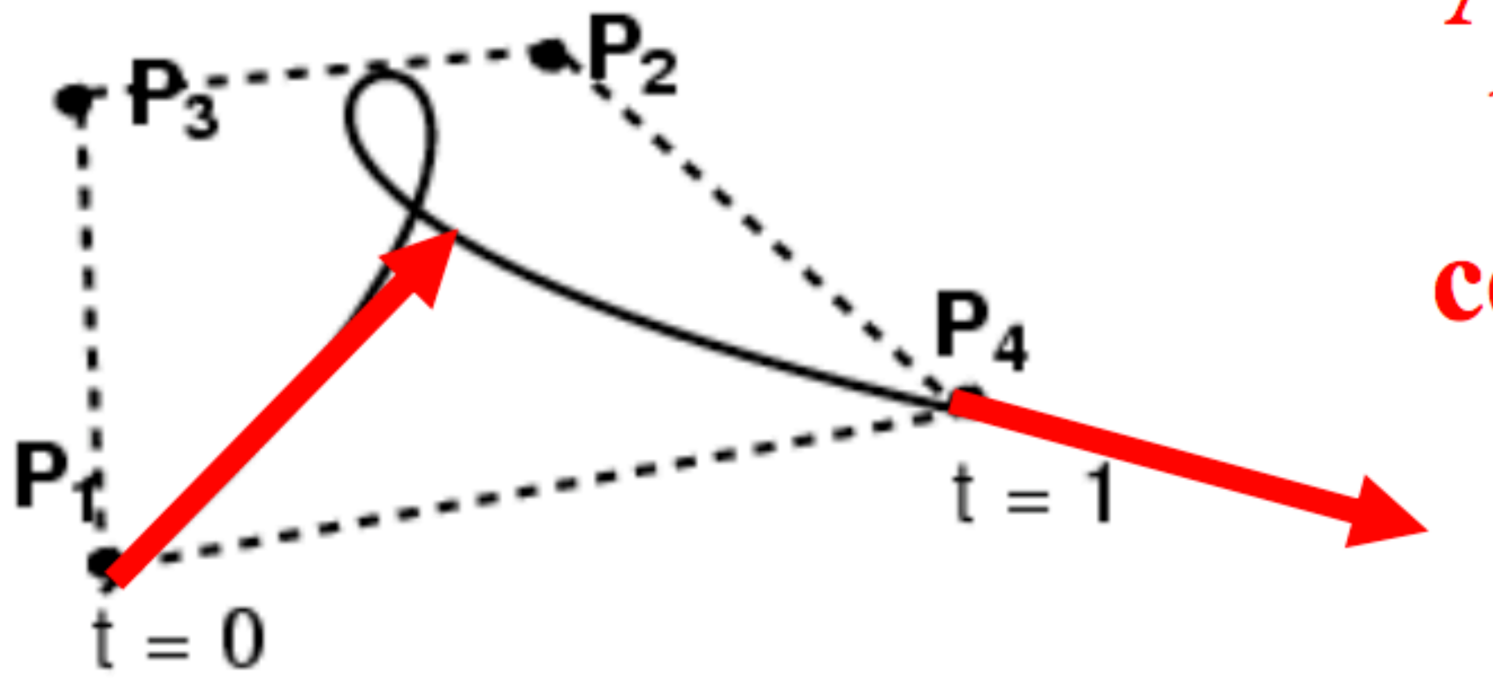


Curvas de Bezier

- 4 control points
- Curve passes through first & last control point
- Curve is tangent at **P1** to (**P1-P2**) and at **P4** to (**P4-P3**)







A Bézier curve is bounded by the **convex hull** of its control points.

Curvas de Bezier

- $P(t) = (1-t)^3 \quad \mathbf{P1}$
  $+ \quad 3t(1-t)^2 \quad \mathbf{P2}$
  $+ \quad 3t^2(1-t) \quad \mathbf{P3}$
  $+ \quad t^3 \quad \mathbf{P4}$

¿Por qué funciona?

Curvas de Bezier

- $P(t) = (1\text{-}t)^3 \quad \mathbf{P1}$
  $+ \quad 3t(1\text{-}t)^2 \quad \mathbf{P2}$
  $+ \quad 3t^2(1\text{-}t) \quad \mathbf{P3}$
  $+ \quad t^3 \quad \mathbf{P4}$

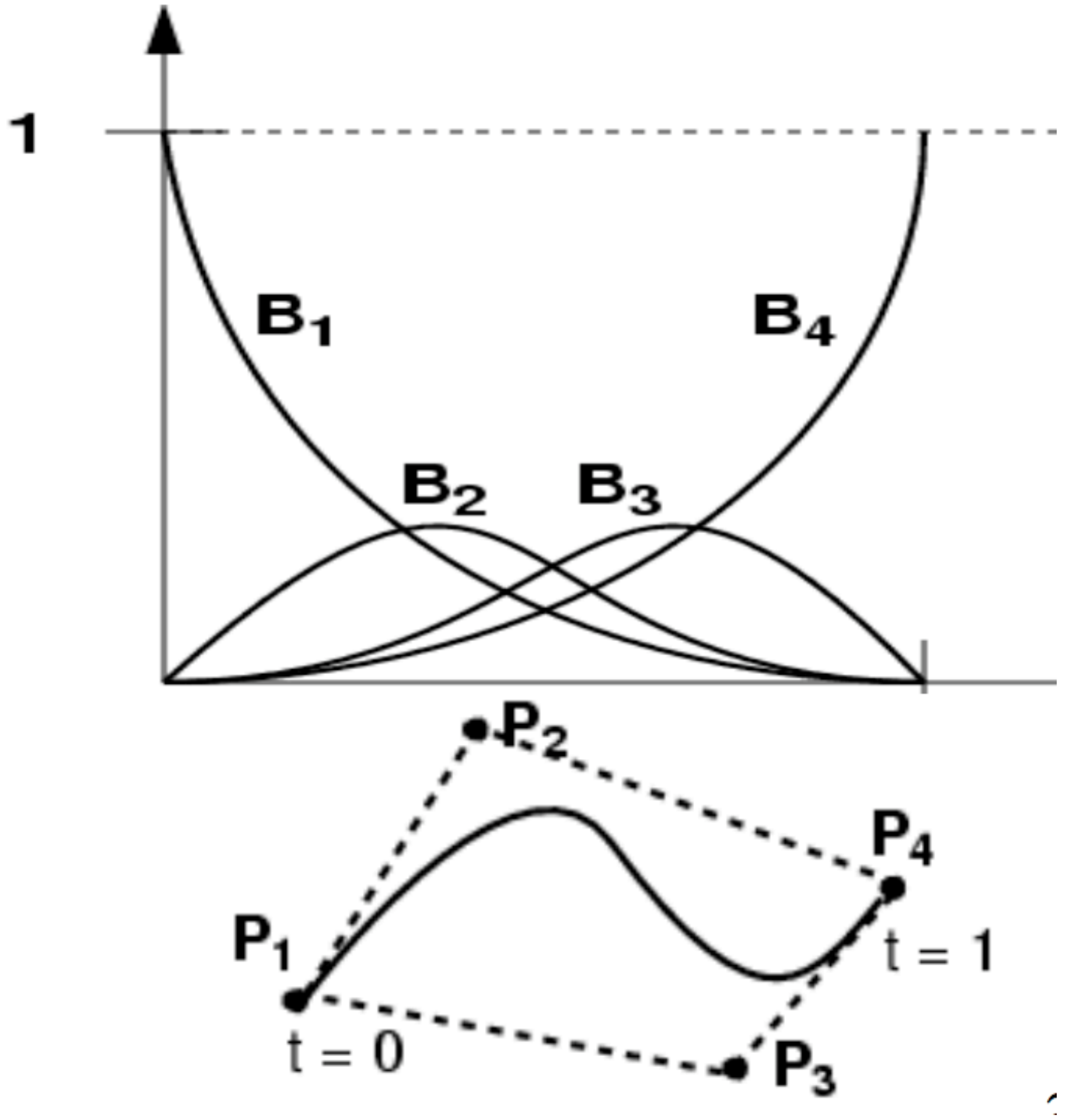
¿Por qué funciona?

Combinación lineal de polinomios base

Curvas de Bezier

- P(t) is a weighted combination of the 4 control points with weights:
  - $B1(t)=(1-t)^3$
  - $B2(t)=3t(1-t)^2$
  - $B3(t)=3t^2(1-t)$
  - $B4(t)=t^3$
- First, P1 is the most influential point, then P2, P3, and P4

$$
\begin{aligned}
P(t) = \; & (1-t)^3 \; \mathbf{P1} \\
+ \; & 3t(1-t)^2 \; \mathbf{P2} \\
+ \; & 3t^2(1-t) \; \mathbf{P3} \\
+ \; & t^3 \; \mathbf{P4}
\end{aligned}
$$



Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$

Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$

Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$

Polinomio de Bernstein

Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$

Polinomio de Bernstein

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Grado

Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$

Polinomio de Bernstein

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{6}{i!(3-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Grado

Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$

Polinomio de Bernstein

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{6}{i!(3-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Grado

$$P(t) = P_0 J_{3,0}(t) + P_1 J_{3,1}(t) + P_2 J_{3,2}(t) + P_3 J_{3,3}(t)$$

$$= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

Curvas de Bezier

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i J_{n,i}(t)$$ Polinomio de Bernstein

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{6}{i!(3-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

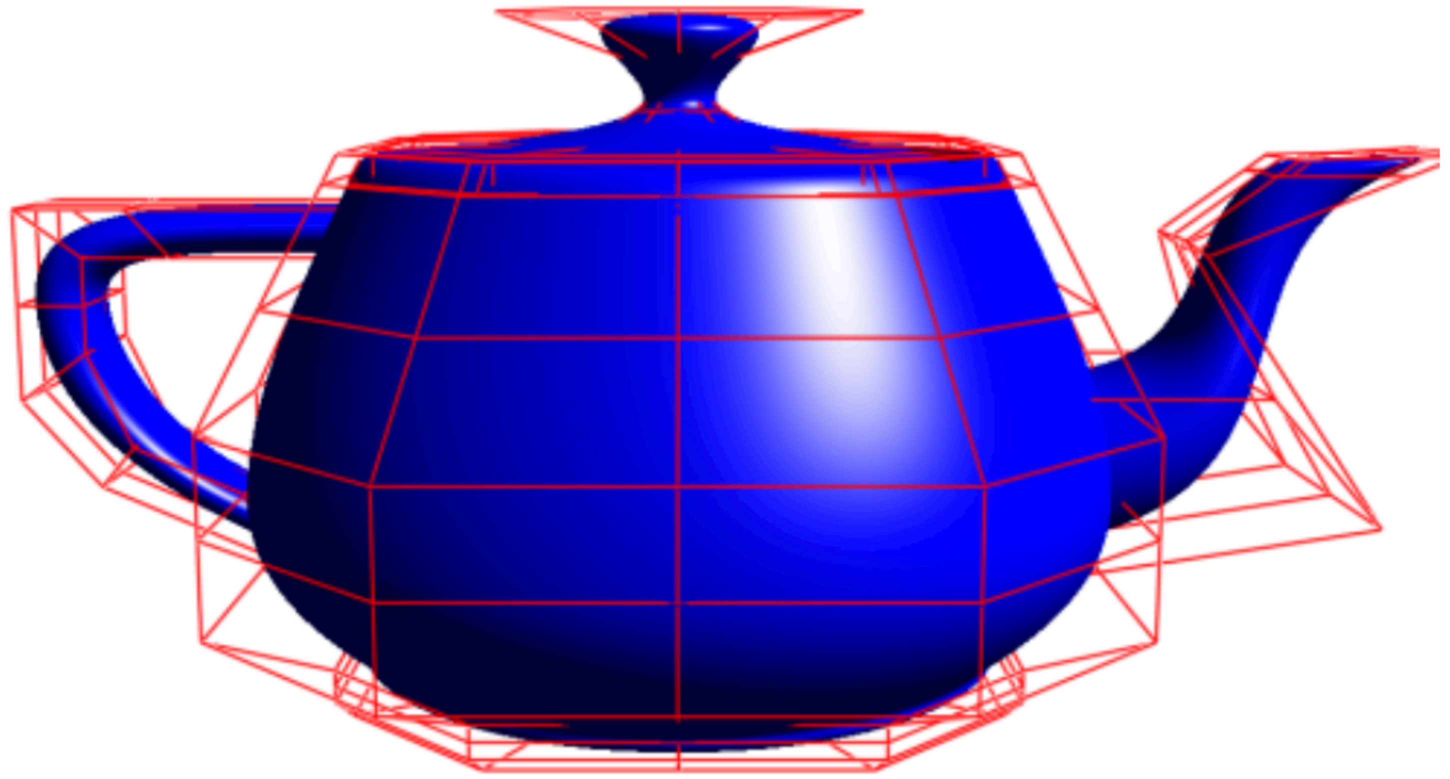
Grado

$$P(t) = P_0 J_{3,0}(t) + P_1 J_{3,1}(t) + P_2 J_{3,2}(t) + P_3 J_{3,3}(t)$$

$$\boxed{= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3}$$

Bezier patches

$$\mathbf{p}(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(u)\; B_j^m(v)\; \mathbf{k}_{i,j}$$



$$B_i^n(u) = \binom{n}{i}\, u^i (1-u)^{n-i}$$

Bernstein polynomial

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

https://www.youtube.com/watch?v=-BOB6YamcWk

https://www.youtube.com/watch?v=-BOB6YamcWk

Demo

http://blogs.sitepointstatic.com/examples/tech/svg-curves/quadratic-curve.html

http://blogs.sitepointstatic.com/examples/tech/canvas-curves/bezier-curve.html

MATLAB demo

Curvas de Bezier

- ¿Podemos juntamos 2 o más curvas?
- ¿Podemos escalar, rotar o trasladar curvas?